О ПРЕПОДАВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аслонов Улугбек Шамсиддинович,
Бухарского областного центра переподготовки и
повышения квалификации народного образования
Шамсиддинова Мафтунабону Улугбек кизи,
Студент Бухарского государственного университета

Аннотация: В настоящей статье приведен краткий обзор об истории возникновения и основных теоретических сведений о частных производных функции многих переменных. Также, дано определения частной производной и дифференцируемости функции. Приведены примеры для вычисления частной производной с помощью калькулятора и по формуле, а также контрольные вопросы и задания. Целью настоящей статьи является развитию навыков самостоятельного обучения студентами.

Ключевые слова: функции нескольких переменных, дифференциальные уравнения в частных производных, линейное программирование, приращения, производная по времени, частная производная, внутренняя точка, полное приращение, касательная плоскость, граничная точка, аргумент, фиксированное значение.

KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING DIFFERENTSIALLANISHINI O'RGATISH HAQIDA

Aslonov Ulugbek Shamsiddinovich,
Buxoro viloyat XTXQTMO hududiy markazi katta o‘qituvchisi
Shamsiddinova Maftunabonu Ulug’bek qizi,
Buxoro davlat universiteti talabasi

Annotasiya: Ushbu maqolada ko'p o'zgaruvchilar funksiyasining qisman hosilalari haqida asosiy nazariy ma'lumotlar keltirilgan. Shuningdek, funksiyaning qisman hosilasi va differentsialligi ta’riflari berilgan. Formula va qo‘llanmalardan foydalanib, qisman hosilalarni hisoblash uchun misollar, shuningdek test savollari va topshiriqlar keltirilgan. Ushbu maqolaning maqsadi talabalarning mustaqil bilim olish qobiliyatini rivojlantirishdir.

Kalit so'zlar: bir nechta o'zgaruvchilarning funktsiyalari, qisman differentsial tenglamalar, chiziqli dasturlash, vaqt hosilasi, qisman hosila, ichki nuqta, umumiy o'sish, tangens tekislik, chegara nuqtasi, argument, o'zgarmas qiymat.

ABOUT TEACHING THE DIFFERENTIABILITY OF A FUNCTION OF MULTIPLE VARIABLES

Aslonov Ulugbek Shamsiddinovich,
Bukhara Regional Center of Retraining and
In-service Training Personnel of Public Education
Shamsiddinova Maftunabonu Ulugbek qizi,
Student of Bukhara State University

Annotation: This article provides a brief overview of the history of becoming and basic theoretical information about partial derivatives of a function of many variables. Also, there are given definitions of partial derivative and differentiability of a function. Examples are given for calculating the partial derivative using a calculator and using a formula, as well as control questions and tasks. The purpose of this article is to develop students' independent learning skills.

Keywords: functions of multiple variables, partial differential equations, linear programming, increments, time derivative, partial derivative, internal point, total increment, tangent plane, boundary point, argument, fixed value.

Многие явления, происходящие в природе, физике, технике, экономике, общественной жизни нельзя описать с помощью функции одной переменной. Например, рентабельность предприятия зависит от прибыли, основных и оборотных фондов. Для изучения такого рода зависимостей и вводится понятие функции нескольких переменных.

Известно, что функции нескольких переменных как естественное обобщение функций одной переменной выделились в самостоятельный раздел математики достаточно давно и являются инструментом, позволяющим описать многие закономерности, существующие в природе (физике, технике, экономике и др.). В настоящее время понятия и математический аппарат функций, зависящих от нескольких переменных, лежит в основе многих дисциплин (например, дифференциальные уравнения в частных производных, линейное программирование и др.) и является необходимым набором знаний современного инженера.

Практика показывают, что не все студенты понимают те теоретические и логические основы, без которых нельзя правильно вычислить частной производной и частные дифференциалы функций многих переменных. Это и проявляется на экзаменах и тестах. Некоторые знают теоретические основы положения, но знают их формально. При вычислении частной производной, каждый должен владеть тем минимумом теоретических знаний, который необходим для конкретной функции.

Сначала дадим краткие исторические сведения о частной производной функции многих переменных, определение частного производного и дифференцируемости функции.

Известно что, производная функции в точке является основным понятием дифференциального исчисления. Она характеризует скорость изменения функции в указанной точке (а частная производная характеризует изменения функции в указанной точке по отдельным переменным). Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук, в особенности при изучении скорости различного рода процессов.

Обозначение приращения (аргумента/функции) греческой буквой Δ (дельта) впервые употребил швейцарский математик и механик Иоганн Бернулли (1667 - 1748). Обозначение дифференциала, производной dx принадлежит немецкому математику Г.В. Лейбницу (1646 - 1716). Манера обозначать производную по времени точкой над буквой - $\dot{x}$ - идёт от английского математика, механика и физика Исаака Ньютона (1642 - 1727). Краткое обозначение производной штрихом - $f'(x)$ - принадлежит французскому математику, астроному и механику Ж.Л. Лагранжу (1736 - 1813), которое он ввел в 1797 году. Символ частной производной $\partial/\partial x$ активно применял в своих работах немецкий математик Г.Я. Карл, Якоби (1805 - 1051), а затем выдающийся немецкий математик Г. Карл и Вейерштрасс (1815 - 1897), хотя это обозначение уже встречалось ранее в одной из работ французского математика А.М. Лежандра (1752 - 1833). Символ дифференциального оператора ∇ придумал выдающийся ирландский математик, механик и физик У.Р. Гамильтон (1805 - 1865) в 1853 году, а название «набла» предложил английский ученый-самоучка, инженер, математик и физик Оливер Хевисайд (1850 - 1925) в 1892 году.

Русский термин «производная функции» впервые употребил русский математик В.И. Висковатов (1780 - 1812).

В математическом анализе частная производная (первая производная) - одно из обобщений понятия производной на случай функции нескольких переменных. Частная производная - это предел отношения приращения функции по выбранной переменной к приращению этой переменной, при стремлении этого приращения к нулю.

Дадим определение частной производной. Пусть $M(x_1,\ldots,x_m)-¿$ внутренняя точка области определения функции $u=f(x_{1,}\ldots,x_m)$. Рассмотрим частное приращение этой функции в точке $M(x_{1,,}x_m)$, соответствующее приращению Δx_k аргумента x_k $u=f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},,x_m)-f(x_{1,}\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots x_m)$.

Отношение $\frac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k}$ является функцией одного аргумента Δx_k (при фиксированной точке $M(x_1,\ldots,x_m)$.

Определение. Частной производной функцией $u=f(x_1,\ldots,x_m¿$ по аргументу x_kв точке M называется

$$\lim_{\Delta x_{k\to 0}}\frac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k}\text{(если он существует).}$$

Эта частная производная обозначается любым из следующих символов $\frac{du}{dx_k}(M)$или $\frac{df}{dx_k}(M)$ или $u_{x_k}(M)$ или $f_{x_k}(M)$ [1].

Отметим, что при фиксированных значениях всех аргументов, кроме x_k, функция $u=f(x_1,\ldots,x_m)$ становится функцией одной переменной. Производная этой функции одной переменной и есть частная производная функции $u=f(x_1,\ldots,x_m)$ по аргументу x_k. Поэтому вычисления частных производных производится по тем же правилам что и вычисление производных функций одной переменной.

Физически смысл частной производной $\frac{du}{dx_k}(M)$ – это скорость изменения функции в точке M в направлении оси Ox_k.

Замечание. Если M - граничная точка области определения функции, то для такой точки введенное определение частной производной может быть непригодным.

Например, если функция $u=f(x,y)$ определена в треугольнике G (рис.1), то для граничной точки $M_0(x_0,y_0)$ не определено частное приращение $\Delta_x u$, так как при любом $\Delta x\neq 0$ точка $M(x_0+\Delta x,y_0)$ лежит вне области G. Поэтому нельзя определить $\frac{du}{dx}(M_0)$, пользуясь данным выше определением частной производной.

В таком случае, если существует частная производная $\frac{du}{dx}$ во внутренних точках M области G, то по определению полагают

$$\frac{du}{dx}(M_0)=\lim_{M\to M_0}\frac{du}{dx}(M)\text{,(если этот предел существует).}$$

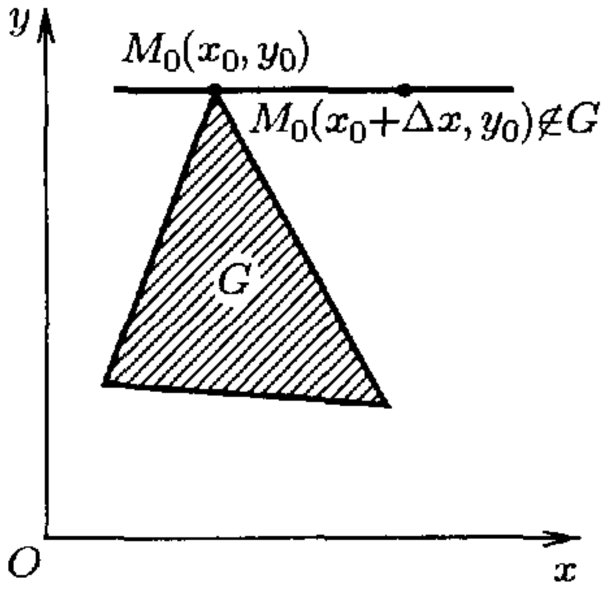

Рис.1

Частные производные функции имеют следующие свойства. Пусть функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$ определены в $E \subset R^m$ и имеют частные производные в точке $x \in E$. Тогда:

1) $\forall c \in R: \quad \frac{\partial (c f(x))}{\partial x_k} = c \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$;

2) $\frac{\partial (f(x) + g(x))}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial g(x)}{\partial x_k}$;

3) $\frac{\partial (f(x) \cdot g(x))}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} g(x) + f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_k}$;

4) $\frac{\partial \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)}{\partial x_k} = g^{-2}(x) \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} g(x) - f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_k} \right) (g(x) \neq 0), \quad k = 1, 2, \dots, m$.

Теперь, сформулируем определение дифференцируемости функции. Рассмотрим полное приращение функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ во внутренней точке $M(x_1, \dots, x_m)$ области определения функции

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m).$$

Оно является функцией аргументов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$.

Определение. Функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется дифференцируемой в точке $M(x_1, \dots, x_m)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + a_1 \Delta x_1 + \dots + a_m \Delta x_m, \qquad (1)$$

где $A_i -$¿ некоторые числа, $a_i (i = 1, \dots, m) -$¿функции аргументов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, бесконечно малые при $\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_m \to 0$ и равные нулю при $\Delta x_1 = \dots \approx \Delta x_m = 0$.

Условие дифференцируемости (1) можно записать в другой, эквивалентной форме

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + a(\rho), \qquad (2)$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2} - ¿$ расстояние между точками $M(x_1, \ldots, x_m)$ и $M'(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m)$, $a(\rho) = o(\rho)$ при $\rho \to 0$.

Объясняем геометрический смысл дифференцируемости функции. Напомним, что для функции одной переменной $y = f(x)$ из дифференцируемости функции в точке x_0 следует существование касательной к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$.

Рассмотрим непрерывную функцию двух переменных $u = f(x, y), (x, y) \in G$.

График этой функции, т.е. множество точек $S = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in G\}$, представляет собой поверхность в пространстве E^3.

Пусть плоскость P приходит через точку $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ поверхности S; $N(x, y, f(x, y)) - ¿$ произвольная точка на поверхности S; N_1- основание перпендикуляра, проведенного из точки N к плоскости P (рис. 2).

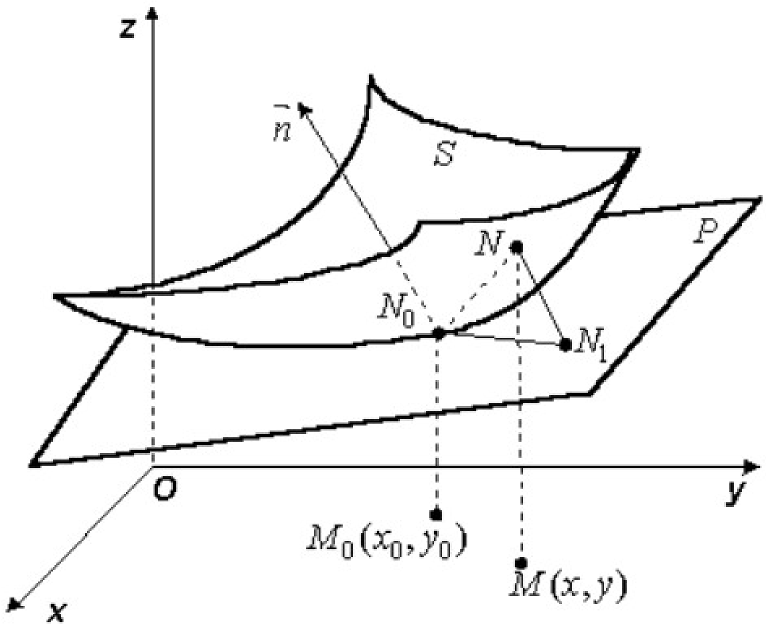

Рис. 2

Приведем другой пример. Пусть, графиком функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность.

График функции есть $z = f(x_0, y_0)$ линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y = y_0$. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной заключаем, что $f_x(x_0, y_0) = tg\alpha$ угол между осью Ox и касательной, проведенной к кривой $z = f(x_0, y_0)$ в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (рис. 3).

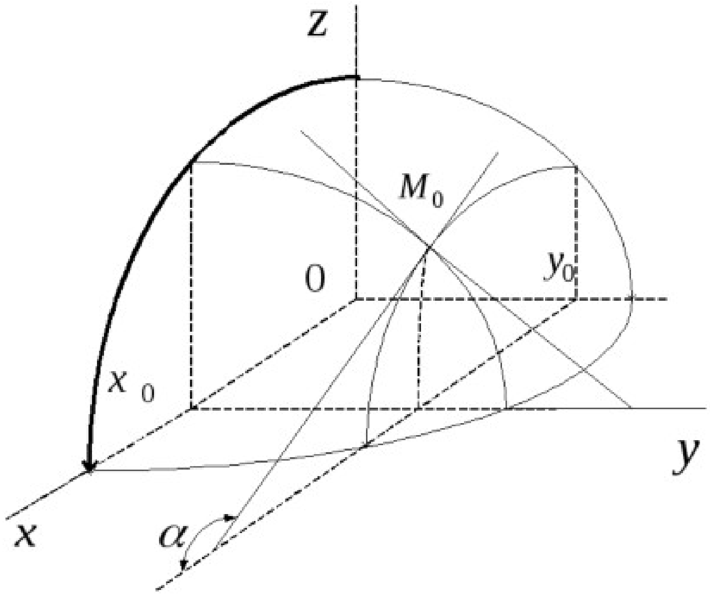

Рис. 3

Определение. Плоскость P, проходящая через точку N_0 поверхности S, называется касательной плоскостью к поверхности S в этой точке, если при $N \to N_0 (N \in S)$ величина $\rho(N, N_1)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $p(N, N_0)$,т.е.

$$\lim_{\substack{N \to N_0 \\ N \in S}} \frac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} = 0.$$

Рассмотрим касательной к графику функции в другом примере. Например, график функции $z = x^2 + xy + y^2$. Частная производная в точке (1,1,3) при постоянном y соответствует углу наклона касательной прямой, параллельной плоскости xz (рис.4).

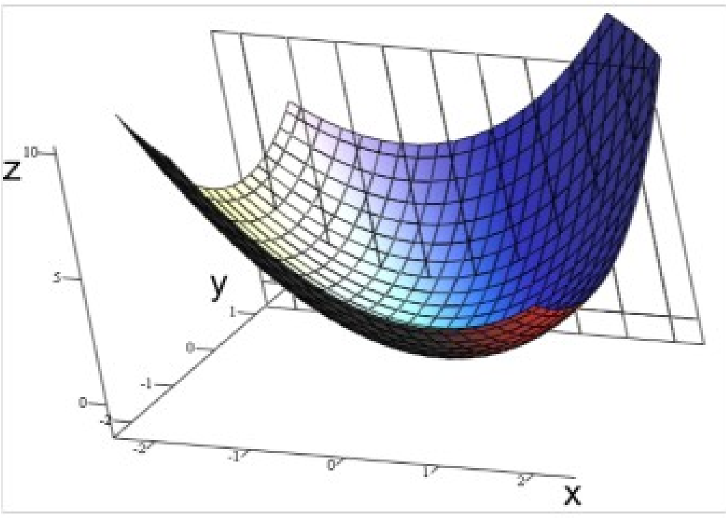

Рис.4

Практика показывает, что приведение определение дифференциала в следующей схеме, более понятно для студентов. Эти положительные отзывы были получены при опросе студентов 2-курса математического направления университета.

Пусть функция $u=f\left(x_1,\dots,x_m\right)$ дифференцируема в точке $M\left(x_1,\dots,x_m\right)$, т.е. ее приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m\text{¿}+(a\text{¿¿}1\Delta x_1+\ldots+a_m\Delta x_m).\text{¿}$$

Выражение в квадратных скобках является линейной относительно $\Delta x_1+\ldots+\Delta x_m$ частью приращения функции, а выражение в круглых скобках - бесконечно малой функцией при $\Delta x_1\rightarrow 0,\dots,\Delta x_m\rightarrow 0$более высокого порядка, чем $\rho=\sqrt{\left(\Delta x_1\right)^2+\ldots+\left(\Delta x_m\right)^2}$.

Дифференциалом (или первым дифференциалом) функции $u=f\left(x_1,\dots,x_m\right)$ в точке М называется линейная функция аргументов $\Delta x_1+\ldots+\Delta x_m$:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\,d x_1+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\,d x_m.(3)$$

Если аргументы дифференцируемой в точке $M\left(b_1,\dots,b_m\right)$ функции $u=f\left(x_1,\dots,x_m\right)$ являются не независимыми переменными, а дифференцируемы функциями каких-либо независимых переменных $t_1,\dots t_k$:

$$x_1=\varphi_1\left(t_1,\dots,t_k\right),\dots,x_m=\varphi_m\left(t_1,..t_k\right),$$

причем $b_1=\varphi_1\left(a_1,\dots,a_k\right),\dots,b_m=\varphi_m\left(t_1,\dots,t_k\right)\text{¿}$ то дифференциал сложной функции $u=f\left(\varphi_1\left(a_1,\dots,a_k\right),\dots\varphi_m\left(t_1,\dots,t_k\right)\right)$ в точке $A\left(a_1,\dots,a_k\right)$ по-прежнему имеет вид (3), но $d x_1,\dots,d x_m$ являются не приращениями переменных $x_1,\dots,x_m$ (как в случае, когда $x_1,\dots,x_m$ - независимые переменные).

Это свойство называется инвариантностью формы первого дифференциала.

Для укрепления темы предлагаем следующие вопросы и задачи. Задачи составлены в порядке от простого к сложному. Эти вопросы засталяют студентов самостоятельно изучить темы, а также искать другие источники информации.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Найти частные производные функции:

а) $u=x^y$ ($x>0$);

б) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Решение. а) При вычислении частной производной функции $u=x^y$ по аргументу x рассматриваем функцию u как функцию только одной переменной x, т.е. считаем, что y имеет фиксированное значение. При фиксированном y функция $u=x^y$ является степенной функцией аргумента x.

По формуле дифференцирования степенной функции получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = y\,x^{y-1}$.

Аналогично, при вычислении частной производной $\frac{\partial u}{\partial y}$ считаем, что фиксировано значение x, и рассматриваем функцию $u = x^y$ как показательную функцию аргумента y. Получаем $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$.

б) При фиксированных значениях y и z функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ являются сложной функцией аргумента x. Вычисляя производную этой функции аргумента x, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Отметим, что полученные формулы теряют смысл в точке O(0,0,0).

Замечание. Функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, очевидно, непрерывна в точке O(0,0,0), но не дифференцируема в этой точке (поскольку не имеет частных производных в точке O(0,0,0). Это доказывает, что непрерывность является только необходимым, но не достаточным условием дифференцируемости функции.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial x}$, если переменные x, y, и z связаны равенством $4x^2 y e^z - \cos(x^3 - z) + 2y^2 + 3x = 0$.

Решение находим с помощью калькулятора.

Для $F(x, y, z) = 4x^2 y e^z - \cos(x^3 - z) + 2y^2 + 3x$получаем:

$Fx = ¿$ = [считаем y и z постоянными] =

$¿\, 8xye^z + \sin(x^3 - z)\,3x^2 + 3 = 8xye^z + 3x^2 \sin(x^3 - z) + 3;$

$F_y = ¿$ [считаемx иz постоянными] $¿\, 4x^2 e^z + 4y;\ F_z = ¿$ =

[считаем x и y постоянными]

$= 4x^2 y e^z - \sin(x^3 - z).$

По формулам находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{8xye^z + 3x^2 \sin(x^3 - z) + 3}{4x^2 ye^z - \sin(x^3 - z)};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{4x^2 e^z + 4y}{4x^2 ye^z - \sin(x^3 - z)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{8xye^z + 3x^2 \sin(x^3 - z) + 3}{4x^2 e^z + 4y}$$

и получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{8xye^z+3x^2\sin(x^3-z)+3}{4x^2ye^z-\sin(x^3-z)};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4x^2e^z+4y}{4x^2ye^z-\sin(x^3-z)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{8xye^z+3x^2\sin(x^3-z)+3}{4x^2e^z+4y}.$$

Известно, что теория функций многих переменных, особенно частные производные и дифференциалы функций многих переменных в $m-¿$ мерном пространстве, широко используется практически во всех областях математики и механики. Следует отметить, что применение при преподавании темы по функциям многих переменных современных интерактивных методов являются эффективными. Примерами этого являются [2-5] исследования по этим темам, основанные на передовых педагогических технологиях и научные статьи посвященные [6-9] к многомерным функциям и ее применениям.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

1. Бутузов В.П. Математический анализ в вопросах и задачах, Москва, Физматлит, 2001 г., 479 с.
2. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
3. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
4. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.
5. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:9 (2021), p.7-20.
6. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
7. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
8. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.
9. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.

10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.