О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Соатов Улугбек Абдукадирович
Джизакский политехнический институт, доцент, к.ф-м.н.
Джонизаков Улугбек Абдуганиевич
Джизакский политехнический институт, ст.преподаватель

Аннотация: В статье рассматриваются нелинейные системы уравнений, методы их решения и проанализированы решения систем в примерах. Рассматриваемые задачи могут послужить первым шагом на пути перехода от решения упражнений и задач в учебниках к решению сложных задач.

Ключевые слова: Уравнение, системы уравнений, нелинейные системы, метод подстановки, метод разложения, решение.

ABOUT METHODS FOR SOLVING NONLINEAR SYSTEMS OF EQUATIONS

Soatov Ulugbek Abdukadirovich
Jizzakh Polytechnic Institute, Associate Professor
Джонизаков Улугбек Абдуганиевич
Jizzakh Polytechnic Institute, Senior teacher

Abstract: The article discusses nonlinear systems of equations, methods for solving them, and analyzes the solutions of the systems in examples. The problems under consideration can serve as the first step towards the transition from solving exercises and problems in school textbooks to solving complex problems.

Keywords: Equation, systems of equations, nonlinear systems, substitution method, expansion method, solution.

В процессе общего среднего образования ведущее значение, в воспитании подрастающего поколения кадром с широким кругозором, имеют глубокие математические знания. Очень полезно организовать занятие с учениками с математическими способностями на уроках математики, в классной и внеклассной деятельности. Поскольку математика является логической наукой, она укрепляет логическое мышление детей раннего возраста, быстро развивает их ум, создает основу для легкого освоения физики, техники и других предметов.

Одной из наиболее эффективных форм внеклассной и внешкольной деятельности в школе являются научные кружки, которые играют важную роль в развитии детей, а возможности, возникающие в этом процессе, оказывают развивающее влияние на учащихся. Именно в это время проявляется самостоятельное мышление и творчество детей, хотя эти творческие способности очень малы, в дальнейшем их интерес к науке будет расти. Одна из целей математического кружка – научить учащихся мыслить самостоятельно.

В данной статье рассмотрены задачи, которые могут послужить первым шагом на пути перехода от решения упражнений и задач в школьных учебниках к решению сложных задач.

В отличие от линейных уравнений нелинейные уравнения могут быть определены не при всех значениях входящих в них переменных. Например, уравнение $\lg(x^2+y)=2$ определено при $x^2+y>0$, а уравнение $\frac{x}{y}=2$ определено при $y\neq 0$. При решении систем нелинейных уравнений рассмотрим следующие методы решения: метод подстановки, метод разложения одного уравнения системы на линейные множители, метод введения новых переменных и графический метод решения. Изучаем применения каждого метода решением систем в примерах.

Основная часть:

I. Метод подстановки. Если в процессе решения уравнения область его определения расширяется, то полученные решения обязательно нуждается проверке.

Пример-1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=42 \\ (x-5)(y+4)=0 \end{cases}$.

Решение. $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=42 \\ (x-5)(y+4)=0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=42 \\ x-5=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+3xy+2y^2=42 \\ y+4=0 \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 25+15y+2y^2=42 \\ x=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-12x+32=42 \\ y=-4 \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5 \\ y=-\dfrac{17}{2} \end{cases}\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=6+\sqrt{46} \\ y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6-\sqrt{46} \\ y=-4 \end{cases}\end{array}\right..$$

Получим решения $(5;1), (5;-\frac{17}{2}), (6+\sqrt{46};-4), (6-\sqrt{46};-4)$.

II. Решение нелинейных систем уравнений **методом разложения** одного из них на линейные множители.

В этом методе путем равносильных преобразований исходная система проводится к виду

$$\begin{cases} (ax+by)(cx+dy)=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} ax+by=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} cx+dy=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}\end{array}\right..$$

И, решение полученных систем далее можно производить методом подстановки.

Пример-2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 \\ x^2-xy-2x-3y=6 \end{cases}$.

Решение. Рассматривая первое уравнение системы как квадратное относительно переменной x с коэффицентами $1, -2y, -3y^2$, имеем

$x = y \pm \sqrt{y^2+3y^2} = y \pm 2y$ или $x^2-2xy-3y^2=(x-3y)(x+y)$. Тогда

$$\begin{cases} (x-3y)(x+y)=0 \\ x^2-xy-2x-3y=6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-3y=0 \\ x^2-xy-2x-3y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=0 \\ x^2-xy-2x-3y=6 \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=3y \\ 2y^2-3y-2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-y \\ 2y^2-y-6=0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}\end{array}\right..$$

Таким образом найденные пары (x;y) является решениями данной нелинейной системы уравнений.

III. Метод сведения к квадратному уравнению.

Системы уравнений вида $\begin{cases} f(x)+\varphi(y)=a \\ f(x)\cdot\varphi(y)=b \end{cases}$ и приводящимися к ним решаются путем сведения к квадратному уравнению. Обозначая $f(x)=z_1$ и $\varphi(y)=z_2$, по теореме Виета имеем:

$z^2-az+b=0$. Откуда $\begin{cases} f(x)=z_1 \\ \varphi(y)=z_2 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)=z_2 \\ \varphi(y)=z_1 \end{cases}$ где z_1 и z_2 корни квадратного уравнения.

Пример-3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} y+\lg x=1 \\ x^y=0{,}01 \end{cases}$.

Решение. $\begin{cases} y+\lg x=1 \\ x^y=0{,}01 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+\lg x=1 \\ y\lg x=\lg 0{,}01 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+\lg x=1 \\ y\lg x=-2 \end{cases}$. Составляем квадратное уравнение $z^2-z-2=0$. Его корни $z_1=-1$ и $z_2=2$. Тогда

$$\begin{cases} y+\lg x=1 \\ y\lg x=-2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg x=-1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \lg x=2 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0{,}1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=100 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right..$$

IV. Метод введения новых переменных.

Метод введения новых переменных при решении нелинейных систем уравнений позволяет замены переменных в исходных системах свести их к системам, методы решения которых рассмотрены в вышеизложенных методах.

Пример -4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8 \end{cases}$.

Решение. Обозначим $\sqrt[4]{x+y}=u$, а $\sqrt[4]{x-y}=v$. Тогда данное система примет вид:

$$\begin{cases} u-v=2 \\ u^2-v^2=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u-v=2 \\ u+v=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменным x и y, получим:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}=3 \\ \sqrt[4]{x-y}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=81 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=41 \\ y=40 \end{cases}.$$

V. Графический метод решения.

Графический метод решения системы двух уравнений с двумя переменными $\begin{cases} f(x;y)=0 \\ \varphi(x;y)=0 \end{cases}$ состоит в отыскании координат точек пересечения графиков уравнений $f(x;y)=0$ и $\varphi(x;y)=0$.

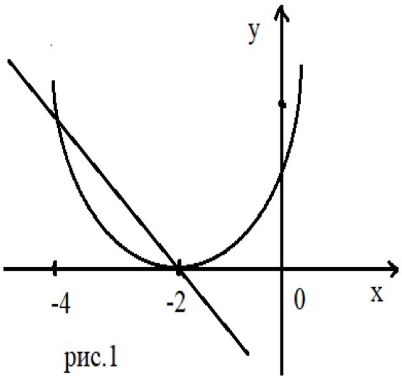

рис.1

Пример-5. Решить систему уравнений. $\begin{cases} y-x^2=4x+4 \\ 2x+y=-4 \end{cases}$.

Решение. На координатой плоскости изображаем параболу $y=x^2+4x+4$ и прямую $y=-2x+4$. (рис.1.). Точки пересечения параболы $y=(x+2)^2$ и прямой $y=-2x+4$ $A(-4;4)$ и $B(-2;0)$. И, решение данной системы: $(-4;4)$ и $(-2;0)$.

Заключение. В этой работе мы рассмотрели вопрос о решении систем нелинейных уравнений. Даны информации об основных методах решения этих систем. Причем для каждого метода приведены типичные примеры с решениями. Изложенные выше понятия и примеры с решениями можно использовать при проведении математических кружков для учащихся, которые являются готовым материалом. В работах [1-19] рассмотрены различные задачи и изучены методы их решения. Заниматься математикой – это значит решать задачи. Для этого необходимо уникальное мышление, умение мыслить самостоятельно. И, основная цель математических кружков – научить учащихся мыслить самостоятельно.

Использованная литература

1. Abdukadirovich, S. U., & Abduganievich, D. U. (2022). ABOUT THE METHODS OF SOLVING PARAMETRIC EQUATIONS. *Journal of Academic Research and Trends in Educational Sciences*, *1*(5), 1-7.
2. Abdug'aniyevich, D. U. B. (2022). PARAMETRLI LOGARIFMIK TENGLAMALARNI YECHISH USULLARIGA OID BA'ZI MASALALAR. *PEDAGOGS jurnali*, *5*(1), 8-16.