

UDK: 517.9

Usmonov Navruz Muzaffarovich

Guliston davlat universiteti tayanch doktoranti,

Usmonov Aktam Akrom o'g'li

Samarqand davlat universiteti tayanch doktoranti

GIL'BERT FAZOSINING ASOSIY XOSSALARI VA UNING TURLI MASALALARGA TADBIQI

Annotatsiya: Ushbu maqolada funksional analizning muhim bo'limlaridan biri bo'lgan Gilbert fazosining nazariy asoslari va uning amaliy tadbirlari keng yoritilgan. Xususan, normalar ekvivalentligi tushunchasi, unga oid ta'rif va teoremlar, hamda bu holatlarning fazoviy strukturaga ta'siri tahlil qilinadi. Chiziqli normalangan fazodagi qism fazolar haqidagi xususiyatlar, ularning yopiq va cheklangan to'plamlar bilan bog'liqligi ko'rib chiqiladi. Maqolada skalyar ko'paytmali fazolar tushunchasi, ular asosida qurilgan fazoviy strukturalar va ularning xossalari o'rganiladi. Shuningdek, abstrakt (abstrakt) Gilbert fazolari, ya'ni cheksiz o'lchamli skalyar ko'paytmali to'liq fazolar ta'rifi, ularning mavjudligi va amaliy ahamiyati nazariy va misollar orqali yoritiladi. Har bir asosiy tushuncha ta'riflar, muhim teoremlar va ularni tasdiqlovchi misollar bilan boyitilgan bo'lib, mavzuning chuqur o'zlashtirilishini ta'minlaydi.

Kalit so'zlar: Gilbert fazosi, normaning ekvivalentligi, chiziqli fazo, skalyar ko'paytma, qism fazo, abstrakt Gilbert fazosi, funksional analiz, teorema, amaliy tadbiq.

UDK: 517.9

Navruz Muzaffarovich Usmonov

PhD student, Gulistan State University,

Aktam Akromovich Usmonov

PhD student, Samarkand State University

MAIN PROPERTIES OF HILBERT SPACES AND THEIR APPLICATIONS TO VARIOUS PROBLEMS

Abstract: This article explores the fundamental concepts of Hilbert spaces, which form a core part of functional analysis, along with their theoretical foundations and practical applications. In particular, it examines the concept of

norm equivalence, relevant definitions and theorems, and the implications of such equivalence on the structure of normed spaces. The properties of subspaces within linear normed spaces are discussed, including aspects related to closure and boundedness. The study also covers inner product spaces and the structures derived from them, emphasizing their analytical and geometric significance. Furthermore, abstract Hilbert spaces—defined as complete inner product spaces, often infinite-dimensional—are introduced and analyzed. Each central concept is supported by clear definitions, key theorems, and illustrative examples, ensuring a thorough understanding of the topic and its practical relevance.

Keywords: Hilbert space, norm equivalence, linear space, inner product, subspace, abstract Hilbert space, functional analysis, theorem, practical application.

УДК: 517.9

Усмонов Навруз Музффарович
Докторант Гулистанского
государственного университета,

Усмонов Актам Акромович
Докторант Самаркандского
государственного университета

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧАХ

Аннотация: В данной статье рассматриваются фундаментальные понятия гильбертова пространства, являющегося важнейшим разделом функционального анализа, а также его теоретические основы и практические применения. Особое внимание уделяется эквивалентности норм, соответствующим определениям и теоремам, а также влиянию этой эквивалентности на структуру нормированных пространств. Изучаются свойства подпространств линейных нормированных пространств, включая вопросы замкнутости и ограниченности. Освещаются внутренне скалярные (евклидовы) произведения и порождаемые ими структуры, их аналитическое и геометрическое значение. Кроме того, рассматриваются абстрактные гильбертовы пространства — полные пространства со скалярным произведением, часто бесконечномерные. Каждый ключевой термин снабжён чёткими определениями, основными теоремами и

поясняющими примерами, что способствует глубокому пониманию темы и её прикладного значения.

Ключевые слова: гильбертово пространство, эквивалентность норм, линейное пространство, скалярное произведение, подпространство, абстрактное гильбертово пространство, функциональный анализ, теорема, практическое применение.

Gilbert fazosi - chiziqli algebra va funksional analiz sohasida muhim ahamiyatga ega bo'lgan matematik tushuncha. Gilbert fazosi, Evklid fazosining umumlashgan ko'rinishi bo'lib, cheksiz o'lchovli fazolar uchun ko'p qo'llaniladi.

Gilbert fazosining asosiy xususiyatlari quyidagilardan iborat:

- Cheksiz o'lchovli vektor fazosi. Gilbert fazosi, cheksiz sondagi vektorlar yig'indisidan iborat bo'lgan fazodir.
- Ichki ko'paytirish operatori. Gilbert fazosida vektorlar orasida ichki ko'paytirish operatori aniqlanadi. Bu operator vektorlar orasidagi "masofa" tushunchasini ta'minlaydi.
- Metrika. Gilbert fazosida vektorlar orasidagi masofani belgilovchi metrika mavjud. Bu metrika vektorlar orasidagi "masofa" ni aniqlaydi.
- Gilbert fazosi va uning xususiyatlari turli sohalarda muhim ahamiyatga ega:
- Kvant mexanikasi. Gilbert fazosi, kvant mexanikadagi "holat fazosi" tushunchasini modellashtirish uchun keng qo'llaniladi.
- Operator nazariyasi. Gilbert fazosi, cheksiz o'lchovli operatorlar nazariyasi uchun asos bo'lib xizmat qiladi.
- Funktsional analiz. Gilbert fazosi, funktsional analiz nazariyasida keng qo'llaniladi. Jumladan, integrallar, differensial tenglamalar, cheksiz o'lchovli yig'indilar kabi murakkab matematik tushunchalar Gilbert fazosi orqali o'rganiladi.
- Signallar nazariyasi. Gilbert fazosi, signallar nazariyasi, sonli qayta ishlov berish va aloqa nazariyasi kabi sohalarda qo'llaniladi.

Chiziqli normalangan fazolar metrik fazo bo'lganligi uchun bunday fazolar uchun metrik fazolar uchun kiritilgan barcha tushunchalar, teoremlar o'rinli bo'ladi.

Ta'rif-1. E chiziqli fazo bo'lib, unda ikkita usul bilan norma kiritilgan bo'ladi: $\|x\|^{(1)}$, $\|x\|^{(2)}$. Agar shunday bir $\beta > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in E$ element uchun $\|x\|^{(2)} \leq \beta \|x\|^{(1)}$

Tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\|x\|^{(2)}$ norma $\|x\|^{(1)}$ normaga bo'ysundirilgan deb aytiladi. Agar E chiziqli fazoda $\|x\|^{(2)}$ norma $\|x\|^{(1)}$ normaga bo'ysundirilgan bo'lsa, u holda $\{x_n\} \subset E$ ketma-ketlikning x nuqtaga $\|x\|^{(1)}$ norma bo'yicha yaqinlashishidan uning $\|x\|^{(2)}$ normabo'yicha yaqinlashishi (shu x nuqtaga) kelib chiqadi.

Ta`rif–1. E chiziqli fazo bo‘lib, unda ikki xil usul bilan norma kiritilgan bo‘lsin: $\|x\|^{(1)}$, $\|x\|^{(2)}$. Agar shunday bir $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sonlar mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x \in E$ element uchun $\alpha \|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq \beta \|x\|^{(1)}$

Tengsizlik o‘rinli bo‘lsa u holda $\|x\|^{(1)}$ va $\|x\|^{(2)}$ normalar ekvivalent deb aytiladi.

Teorema–1. Ixtiyoriy haqiqiy (kompleks) chekli n o‘lchovli chiziqli fazodagi barcha normalar ekvivalentdir.

E chiziqli fazo (normalangan) va undagi bo‘sh bo‘lmagan L to‘plam berilgan bo‘lsin.

Ta`rif–2. Agar E chiziqli normalangan fazodagi L to‘plam yopiq chiziqli ko‘pxillikdan iborat bo‘lsa, u holda L to‘plam E chiziqli normalangan fazodagi qism fazo deyiladi.

Masalan, agar $C_{[a,b]}$ fazodagi barcha darajasi n dan oshmaydigan ko‘phadlar to‘plamini qarash, u holda bu to‘plam $C_{[a,b]}$ dagi qism fazo bo‘ladi. Endi Gil`bert fazosi tushunchasini kiritamiz.

**Ta`rif**–3. H orqali kompleks vektor ( chiziqli ) fazoni belgilaylik. Agar H fazoning har bir x, y elementlari juftligiga quyidagi shartlarni (aksiomalarni) qanoatlantiruvchi elementlar skalyar ko‘paytmasi deb ataluvchi (x,y) kompleks son mos qo‘yilgan bo‘lsa, ya`ni:

$$1) (y, x) = \overline{(x, y)};$$

$$2) (\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda (x_1, y) + \mu (x_2, y);$$

$$3) (x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \text{ faqat va faqat } x=0 \text{ bo‘lsa, u holda H ni skalyar ko‘paytmali fazo deymiz.}$$

Ta`rif–3. Dan ko‘rinadiki

$$a) (x, \lambda y + \mu y_2) = \bar{\lambda} (x, y_1) + \bar{\mu} (x, y_2)$$

$$b) (x, 0) = 0 = (0, y) \text{ kelib chiqadi. Xuddi shunday Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi}$$

$$\text{deb ataluvchi } |(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y) \text{ tengsizlik ham kelib chiqadi.}$$

Agar skalyar ko‘paytma kiritilgan H fazoda $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ ($x \in H$) deb olsak, H normalangan fazoga aylanadi. Haqiqatan ham norma aksiomalaridan 1^o va 2^o lari bajarilishi ko‘rinib turibdi. 3^o – uchburchak aksiomasining bajarilishini ko‘rsatamiz. $x, y \in H$ bo‘lsin, u holda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalanib

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = [\|x\| + \|y\|]^2 \text{ yoki } \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ta`rif–4. Agar H fazoda skalyar ko‘paytmali munosabat bilan norma orqali kiritish mumkin bo‘lsa, u holda bu H ni unitary fazo deymiz. Skalyar ko‘paytma kiritilgan H fazo normalangan fazo ham bo‘lgani uchun, normalangan fazo ega bo‘lgan barcha xossalarga H fazo ham ega bo‘ladi. Bundan tashqari

$$1) \text{ Skalyar ko‘paytma uzluksizdir, ya`ni, agar } x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \text{ bo‘lsa u holda } (x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \text{ bo‘ladi.}$$

2) H fazodan olingan ixtiyoriy ikkita x, y elementlar uchun parallelogram tengligi deb ataluvchi

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (1)$$

Ta'rif–5. To'la unitar fazolarni abstract Gil'bert fazolari deymiz. Shunday qilib abstract Gil'bert H fazosi quyidagi talablarni bajaradi;

1. H kompleks chiziqli (vektor) fazo.
2. H skalyar ko'paytma kiritilgan fazo.
3. $x \in H$ bo'lsa $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, ya'ni H normalangan fazo.
4. H fazo $\rho(x, y) = \|x - y\|$ metrika ma'nosida to'la.
5. H fazoda ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ natural son uchun n ta chiziqli erkli elementlar mavjud, ya'ni H fazo cheksiz o'lchovli bo'lsin. Gil'bert fazosiga doir eng muhim bo'lgan misollarni keltiramiz.

1-misol. l_2 kompleks chiziqli fazodagi ixtiyoriy ikkita $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ elementlar uchun $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ deb olinsa, bu fazo Gil'bert fazosidan iborat bo'ladi.

2-misol. $L_2[a, b]$ kompleks chiziqli fazo. Bu fazo $[a, b]$ oraliqda aniqlangan kompleks qiymatli $x(t)$ o'lchovli funksiyalarning shunday to'plamiki, bunda $\int_a^b |x(t)|^2 \rho(t) dt < +\infty$ bo'lsin, bunda $\rho(t)$ haqiqiy qiymatli va $[a, b]$ oraliqning deyarli hamma joyida $\rho(x, y) \geq 0$ bo'lib to'liq o'lchovli to'plamda $\rho(t) > 0$ bo'lsin. Agar $x(t), y(t) \in L_2, \rho[a, b]$ funksiyalar uchun $(x, y) = \int_a^b x(t) \cdot \overline{y(t)} \rho(t) dt$ deb olsak, u holda bu fazo Gil'bert fazosidan iborat bo'ladi.

Xulosa qilib aytganda, Gilbert fazosi - matematik analiz va amaliy fanlar uchun juda muhim bo'lgan abstrakt matematik tushunchadir. Uning xususiyatlari va Gilbert fazosida qo'llaniladigan usullar turli murakkab ilmiy va amaliy masalalarni yechishga keng imkoniyatlar yaratadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. J.I.Abdullayev, Yu.X.Eshqobilov, R.N.G'anixo'jayev. Funksional analiz (misol va masalalar yechish) I qism. "Tafakkur bo'stoni" Toshkent – 2015. 240
2. Nafasov, G., Xudoyqulov, R., & Usmonov, N. (2023). DEVELOPING LOGICAL THINKING SKILLS IN MATHEMATICS TEACHERS THROUGH DIGITAL TECHNOLOGIES. Евразийский журнал технологий и инноваций, 1(5 Part 2), 229-233.
3. Saipnazarov J.M. Banax fazosida oshkormas funksiya haqidagi teoremlarning tatbiqlari // Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences// Scientific Journal Impact Factor// Volume 1 | ISSUE 4 ISSN 2181-1784// SJIF 2021: 5.423, 166-172 bet.

4. Нафасов Г., Худойкулов Р. и Усмонов Н. (2023). Развитие навыков логического мышления у учителей математики с помощью цифровых технологий. Евразийский журнал технологий и инноваций , 1 (5 Часть 2), 229-233.
5. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. Toshkent: Fan. 1994.
6. Usmonov, N. M. (2024). MAPLE PAKETI ORQALI ODDIY VA XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARINI YECHISH. Экономика и социум, (12-2 (127)), 928-935.
7. О.С.Зикиров Математик физика тенгламалари. Ўқув қўлланма. - Т.: "Фан ва технология". 2017, 320 бет.
8. Usmonov, N. M. (2022). KOMPLEKS ARGUMENTLI TRIGONOMETRIK VA GIPERBOLIK FUNKSIYALAR. Вестник магистратуры, (6-3 (129)), 4-6.
9. Muminov, M. I., & Jumaev, Z. Z. (2025). On the Approximation Algorithms for Solving Generalized Bernoulli Differential Equations Using Piecewise Constant Argument Method. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 11(2), 45.