Yusupova A.K. – Associate Professor, Department of Mathematics,
Fergana State University
Abdulatipova Z. A. - 2nd year student at
Fergana State University

COMBINATORY PROBLEMS ABOUT CHESS MOVEMENTS FIGURES

Annotation

This article examines combinatorial problems about chess and combinatorial moves of chess pieces. To solve such problems, additive number theory and combinatorics formulas are used: placement, permutation, combination.

***Key words**: chess pieces, additive number theory, movement of chess pieces (king, rook..).*

Юсупова А.К. – доцент кафедры математики
Ферганского гос.университета
Абдулатипова З. А.- студентка 2 курса
Ферганского гос.университета

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИЯХ ШАХМАТНЫХ ФИГУР

Аннотация

В данной статье рассматривается комбинаторные задачи о шахматах и о комбинаторных ходах шахматных фигур. В решении таких задач используется используется аддитивная теория чисел, формулы комбинаторики размещение, перестановка, сочетание.

***Ключевые слова:** шахматные фигуры, аддитивная теория чисел,движение шахматных фигур (короля,ладья..).*

Введение

Здесь мы займёмся решением следующего вопроса: сколькими способами может какая-либо шахматная фигура с клетки *(a, b)* перейти на клетку (a_1, b_1) двигаясь все время в поступательном направлении. Мы увидим ниже, что эта задача в некоторых случаях (движение ладьи) имеет тесную связь с аддитивной теорией чисел, т.е. с той частью науки о целом числе (называемой теорией чисел), которая посвящена решению вопроса о разбиении числа на сумму слагаемых. Прототипом задач подобного рода является задача о гирях: как взять *n* чисел a_1, a_2…, a_n так, чтобы всякое число могло быть представлено в виде алгебраической или арифметической суммы чисел a_1, a_2…, a_n. Она была рассмотрена ещё Леонардом Фибоначчи, крупнейшим из европейских математиков средних веков.

Шахматные фигуры можно разделить на две категории: фигуры дальнодействующие и фигуры не дальнодействующие. К первой категории относится слон, ладья и ферзь, а ко второй- конь и король. Мы начнём нашу главу с простейшего случая, а именно с исследования движения короля.

Основная часть

Пусть, например, король стоит на клетке *e*4.

В один ход он может переместиться на одну из восьми клеток *e3, e5, d4, f4, d3, f5, f3, d5*.

Спрашивается - какие из этих перемещений следует считать поступательными? Условимся в дальнейшем под поступательными движениями короля подразумевать движения типа:

e4- e5, e4- f4 и e4- f5,

т.е. вверх, вправо и вправо-вверх , причём мы эти движения обозначим соответственно стрелками ↑, → и ↗ .

Предположим, что король начинает свое движение от угловой клетки (1, 1), двигаясь все время поступательно в двух направлениях $\uparrow$ и $\rightarrow$. Поставим задачу:

Сколькими способами король может дойти с клетки (1, 1) до клетки (*x, y*)?

Обозначим искомое число способов через $F_{x,y}$. Очевидно, что наша фигура может пройти на клетку (*x, y*), либо проходя через (x, y-1), либо через (x-1, y). Но клетку (x, y-1) король может достичь $F_{x,y-1}$ способами, а клетку (x-1, y) $F_{x-1,y}$ способами, откуда сразу получается простое соотношение:

$$F_{x,y} = F_{x,y-1} + F_{x-1,y}, \qquad (1)$$

Позволяющее вычислить $F_{x,y}$, если только известны $F_{x,y-1}$ и $F_{x-1,y}$. Нетрудно сообразить, что $F_{x,1} = 1$ при всяком *x*, так как клетку (*x, 1*) король может достичь, двигаясь все время только в направлении $\rightarrow$. Точно так же $F_{1,y} = 1$ при всяком *y*. Поэтому получим, например, что

$$F_{2,2} = F_{2,1} + F_{1,2} = 1 + 1 = 2;$$

$$F_{2,3} = F_{2,2} + F_{1,3} = 2 + 1 = 3;$$

$$F_{2,4} = F_{2,3} + F_{1,4} = 3 + 1 = 4$$

и т.д. Очевидно, что мы, действуя подобным образом, вычислим $F_{x,y}$ для любой клетки шашечницы.

Выпишем в каждую клетку (*x, y*) вычисленное для нее число $F_{x,y}$. После такого выписывания шахматная доска примет следующий вид (рис. 1), т. е. мы получим так называемую арифметическую шашечницу.

1	8	36	120	330	792	1716	3432

1	7	28	84	210	462	924	1716
1	6	21	56	126	252	462	792
1	5	15	35	70	126	210	330
1	4	10	20	35	56	84	120
1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1

Рисунок 1.

Попробуем теперь выразить $F_{x,y}$ через *x* и *y*. Для этого обозначим цифрой 1 перемещение $\rightarrow$, а цифрой 2 перемещение $\uparrow$. Король может перейти от клетки (1, 1) к (*x, y*), совершив x-1 горизонтальных ходов $\rightarrow$ и y-1 вертикальных ходов $\uparrow$, например, он может перейти на (*x, y*) следующим образом:

$$\underbrace{11\ldots1}_{m_1\,раз}\;\underbrace{22\ldots2}_{n_1\,раз}\;\underbrace{11\ldots1}_{m_2\,раз}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{m_k\,раз}\;\underbrace{22\ldots2}_{n_k\,раз} \qquad (A)$$

причем

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = x - 1;$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = y - 1.$$

Сколько же можно составить подобных комбинаций из x-1 цифр 1 и y-1 цифр 2? Сочетания цифр типа (A) принято называть перестановками с повторениями. Следовательно, нашей ближайшей задачей является определение числа всевозможных перестановок с повторением из x-1 цифр

1 и y-1 цифр 2. Это число, очевидно, и будет как раз равно $F_{x,y}$. Прежде всего заметим, что в схеме (А) всего имеется (x-1)+(y-1)= x+ y -2 цифр.

Составив всевозможные перемещения этих цифр, получим (x+ y -2)! схем, но они не все различны, так как в (А) цифра 1 повторяется x-1 раз, а цифра 2 повторяется (y-1) раз.

Между цифрами 1 можно совершить (x-1)! перестановок, и эти перестановки не изменят (А). Поэтому число (x+ y -2)! схем (А) можно сократить на (x-1)!.

Точно так же (y -1)! Перестановок между цифрами 2 не изменят (А), и поэтому число схем можно сократить ещё на (y -1)!.

В итоге получим, что число различных схем (А) равно

$$\frac{(x+y-2)!}{(x-1)!(y-1)!}$$

Таким образом мы имеем, что

$$F_{x,y}=\frac{(x+y-2)!}{(x-1)!(y-1)!}. \qquad (2)$$

Формула (2) позволяет решить без труда более общую задачу: сколькими способами король может перейти из клетки (a, b) на $(a_1, b_1)^2$, двигаясь все время в направлениях $\uparrow$ и $\rightarrow$. В самом деле, мы всегда можем (a, b) принять за (1, 1).

Тогда клетка (a_1, b_1) относительно (a, b) будет иметь координатами числа a_1-a+1 и b_1-b+1. Отсюда следует, что искомое число способов равно F_{a_1-a+1,b_1-b+1} или, по формуле (2)

$$F_{a_1-a+1,b_1-b+1}=\frac{\left[(a_1+b_1)-(a+b)\right]!}{(a_1-a)!(b_1-b)!}$$

Например, если король стоит на клетке (2, 3), то на клетку (7, 8) он может переместиться

$$\frac{[(7+8)-(2+3)]!}{(7-2)!(8-3)!}=\frac{10!}{5!5!}=252$$

способами, двигаясь в направлениях $\uparrow$ и $\rightarrow$.

До сих пор мы рассматривали тот случай, когда король перемещается поступательно в направлениях $\uparrow$ и $\rightarrow$. Естественно теперь перейти к более общему случаю, а именно пусть король перемещается поступательно в трех направлениях: $\uparrow$, $\rightarrow$ и $\nearrow$.

Мы опять начнём свое исследование изучением движения короля из угловой клетки (1,1) на клетку (x, y). Обозначим через $D_{x,y}$ искомое число перемещений. Для того чтобы попасть на (x, y), король неминуемо должен пройти либо через (x-1, y-1), либо через (x-1,y), либо через (x,y-1). Отсюда будем иметь такое соотношение:

$$D_{x,y}=D_{x-1,y-1}+D_{x-1,y}+D_{x,y-1},$$

причём $D_{x,1}=1$, $D_{1,y}=1$. С помощью этой формулы можно определить $D_{x,y}$ для любой клетки. Проделав все вычисления, мы получим следующую арифметическую шашечницу (рис.2).

1	7	25	63	4
1	5	13	25	3
1	3	5	7	2
1	1	1	1	1

1 2 3 4

Рисунок 2.

Впрочем, оказывается, что и $D_{x,y}$ можно непосредственно выразить через x и y с помощью тех же методов, которые применялись к $F_{x,y}$. Обозначим соответственно через 1, 2 и 3 перемещения $\uparrow$, $\rightarrow$ и $\nearrow$. В своём движении от клетки (1, 1) до (x, y) король должен пройти x-1 строк и у-1 колонн. При ходе 1 он переходит на новую строку, но колонна остаётся одна и та же. Наоборот, при ходе 2 король переходит на новую колонну, оставаясь на одной и той же строке. Наконец, при ходе 3 наша фигура перемещается на новую колонну и новую строку. Поэтому ход 3 эквивалентен перемещению 12 или 21.

Литература

1. Yusupova A.K. Refining One Theorem For The Romanovsky Distribution The American journal of interdisciplinary innova-tions and Research. 2021 Impact Factor 5,676, vol. 03 Crossref doi 10.37547
2. Yusupova A.K Developing Matematical Institation in Students. International Journal of Cblture and Modernity
3. Yusupova A.K Developing students' logical thinking in the process of teaching probability theory and mathematical statistics.
4. Юсупова А.К., Абдулатипова З.А. Рещение химических задач математическими методами. Международная конференция «Интеграция современных химических наук в охране общественного здоровья» 2023 год 18 декабрь. Стр. 317-319
5. Юсупова А.К., Абдулатипова З.А. Нахождение неизвестных химических металлов с помощью математики. Международная конференция «Интеграция современных химических наук в охране общественного здоровья» 2023 год 18 декабрь. Стр. 323-327
6. Yusupova A.K., Bogdan A. Tibbiyot masalalarini hal qilishda kombinatorika formulalarini qo’llash. Международная конференция «Интеграция современных химических наук в охране общественного здоровья» 2023 год 18 декабрь. Стр. 431-433.