УДК: 531.36, 330.1, 316.4

Соловьёв А.С.

Россия, г. Ростов-на-Дону

ДЕФОРМАЦИЯ СТРУКТУР.

Аннотация: *предлагается метод расчёта деформации иерархических структур.*

Ключевые слова: *организация, циклический комплекс, тензор и вектор деформации, напряжённость связей.*

Soloviev A. S.
Russia, Rostov-on-don

DEFORMATION OF STRUCTURES.

Abstract: *A method for calculating the deformation of hierarchical structures is proposed.*
Keywords: *organization, cyclic complex, strain tensor and vector, bond strength.*

Метрический тензор и его свойства. Рассмотрим многообразие X состояний некоторой организации. На данном многообразии зафиксируем произвольную точку a и построим на нём карту X_a. В этой карте построим аффинное пространство $A = (X_a, \boldsymbol{X}_a, \Phi, D)$, где $X_a \subset X$, $\boldsymbol{X}_a$ – присоединённое к X_a векторное пространство событий, $\Phi = \Phi(\boldsymbol{X}_a)$ – определённый на пространстве событий функционал, действующий на X_a как параллельный перенос так, что, если $a, x \in X$, то $\Phi(\boldsymbol{X}_a)$: $X_a \to X_a$, $x = \Phi(\boldsymbol{u})a = a + \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}$, и ему в соответствие поставим эрмитово сопряжение $A^* = (X_a^*, \boldsymbol{X}_a^*, \Phi^*, D^*)$.

Параллельный перенос связан с вектором изменения состояния, т.е. с событием $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}_a$. При этом, если элементы $\boldsymbol{X}_a \in A$ представляются как вектор-столбцы, то элементами A^* будут вектор-строки.

Связь между аффинными пространствами определим равенствами

$$\boldsymbol{u} = \varphi^* u, \quad \boldsymbol{u}^* = u^*\varphi, \quad u = x - a \in X, \quad u^* = x^* - a^* \in X^*, \tag{1}$$

где введены обозначения: $\varphi = (\varphi_i |\ i \in N) \in \Phi$ – вектор-столбец, $\varphi^* = (\varphi^i\!: i \in N) \in \Phi^*$ - вектор-строка, $u = x - a \in X$, $u^* = x^* - a^* \in X^*$. Метрическую функцию на аффинном пространстве определим равенством $D^*(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}$, на его сопряжении – равенством $D(\boldsymbol{u}^*) = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*$. При этом будем полагать, что выполняются условия: $\varphi_i^* = \varphi^i$ и $\varphi_i^*\varphi^i = \delta^{ij}/|N|$.

Из (1) следует

$$D^*(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} = u^*Gu = u^2 = (u^*)^2. \tag{2}$$

Здесь величины $G = \varphi\varphi^* = ((g_{ij} = \varphi_i(\varphi^j)^*))$, $G^* = ((g^{ij} = \varphi^i(\varphi_j)^*))$ являются квадратными матрицами и

$$u = u^*G, \qquad u^* = G^*u, \qquad G^* = G. \tag{3}$$

Индексы у компонент векторов можно поднимать или опускать с помощью следующего представления метрического тензора

$$g = g^{ij}\varphi_i\varphi_j = \textstyle\sum_{i,j\in N} g^{ij}\varphi_i\varphi_j = g^* = g_{ij}\varphi^i\varphi^j = \sum_{i,j\in N} g_{ij}\varphi^i\varphi^j. \tag{4}$$

Получаем равенства $\varphi = \varphi^*g$, $\varphi^* = g^*\varphi$, из которых следует

$$D(\varphi) = \varphi^*\varphi = 1, \quad D(\varphi^*) = \varphi\varphi^* = G, \quad \varphi I\varphi^* = \varphi g^*g\varphi^*, \tag{5}$$

где $I = g^*g$ – единичная матрица.

Тензор деформации. На многообразии состояний X организации зафиксируем произвольную карту X_a, на ней построим аффинное пространство A_a, зафиксируем на этом пространстве произвольное состояние $x \in A_a$ и приведём его к нормальному виду [1]. Поскольку в нормальном виде интегральная оценка состояния определяется величиной $D(\boldsymbol{u}) = u^*Gu = 1$, u, $\boldsymbol{u} \in A_a$, то метрический тензор характеризует напряжённость состояния связей между объектами в её структурной схеме.

Предположим, что без изменения структуры состояние системы x изменяется, т.е. система переходит в новое состояние $x' \in A_a$. Тогда меняется и её интегральная оценка $D(\boldsymbol{u}') = (u')^*G'u'$. При приведении изменённого состояния к нормальному виду находим, что меняется метрический тензор, что свидетельствует об изменении между объектами организации напряжённости связей. Используя физическую терминологию, будем говорить, что при изменении напряжённости связей происходит деформация организации без нарушения её структурной схемы.

Агрегатную оценку деформации определим по разности интегральных оценок. Ограничиваясь малыми первого порядка, будем иметь

$$D(\boldsymbol{u}') - D(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}')^*G'\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}^*G\boldsymbol{u} = u^*(J^*G'J - G)u, \tag{6}$$

где $J = J(a)$ матрица Якоби, вычисленная в точке a.

Тензор деформации, аналогично метрическому тензору, определим в ковариантной и контравариантной формах выражениями

$$\mathcal{E} = \frac{J^*G'J-G}{2} = \left(\left(\mathcal{E}_{ij}\right)\right)_{n\times n} = \left(\left(\mathcal{E}^{ij}\right)\right)_{n\times n} \tag{7}$$

и, как и метрический тензор, запишем его в виде

$$\mathcal{E} = \sum\nolimits_{i,j\in N} \mathcal{E}_{ij}\varphi^i\varphi^j = \varphi\mathcal{E}^*\varphi^*, \tag{8}$$

$$\mathcal{E} = \sum\nolimits_{i,j\in N} \mathcal{E}^{ij}\varphi_i\varphi_j = \varphi^*\mathcal{E}\varphi, \tag{9}$$

С помощью метрического тензора индексы в формулах (9) и (10) можно поднимать и опускать, а учитывая, что метрический тензор и тензор деформации представлены эрмитовыми матрицами, находим справедливыми равенства

$$\mathcal{E} = g\mathcal{E}g = g^*\mathcal{E}g = g\mathcal{E}^*g^* = g^*\mathcal{E}^*g^*. \tag{10}$$

Вектор деформации. Представим эволюцию организации гладкой кривой L, которую опишем векторной функцией в параметрическом виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \in \boldsymbol{X}$. При фиксировании точки $a \in L$ определим соприкасающуюся, нормальную и спрямляемую плоскости к кривой в этой точке. Последняя является касательной плоскостью T_a к поверхности возможных направлений эволюции организации из данного фиксированного её состояния.

Пересечение этих плоскостей определяет тройку векторов: касательный $\boldsymbol{t}$, нормальный $\boldsymbol{n}$ и бинормаль $\boldsymbol{b}$, которые примем в качестве базиса в текущей точке A, соответствующей состоянию $a \in X$ организации.

Действие тензора деформации как линейного оператора на вектор нормали

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{E}\,\boldsymbol{n} \tag{11}$$

назовём вектором деформации. На рис. 1 — это вектор AC'.

При разложении вектора деформации по текущему базису получим представление

$$\boldsymbol{\varepsilon} = x\boldsymbol{t} + y\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{b}. \tag{12}$$

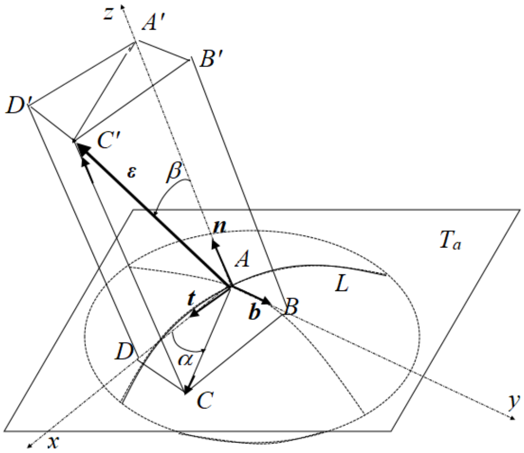

Рис.1. Вектор деформации в текущем базисе.

Из рис. 1 видим, что вектор деформации является прямой суммой его вращения с осью AA' касательной плоскости (момента) на угол α с прецессией на угол β. Прецессия определяется проекцией вектора деформации на направление нормали, т.е. внутренним произведением $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$. Вращение же характеризуется прямым произведением $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\varepsilon}$, которое связано с внешним произведением формулой $\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{\varepsilon} = i(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\varepsilon})$. Прямую сумму этих составляющих обозначим выражением $\boldsymbol{n\varepsilon}$.

Приходим к равенству

$$\boldsymbol{n\varepsilon} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{13}$$

из которого, воспользовавшись основным метрическим тождеством [2], находим модуль вектора деформации

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sqrt{D(\boldsymbol{n\varepsilon})} \tag{14}$$

и его представление "волновой" функцией, унитарным кватернионом [3], которое в стационарном случае принимает вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma(\boldsymbol{\varepsilon})e^{-in\beta t}. \tag{15}$$

Связь тензора деформации с событием. Предположим, что событие $\boldsymbol{u}(x, y) \in \boldsymbol{X}_a$ описывает переход организации из состояния $x = (x^i | \ i \in N_a)$ в состояние $y = (y^j | \ j \in N_a)$ в аффинном пространстве A_a. Если ввести векторы $\boldsymbol{x} = x - a$ и $\boldsymbol{y} = y - a$, то этот переход можно представить векторным равенством

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}. \tag{16}$$

Дифференцируя равенство (16) в окрестности состояния x, и вводя обозначения

$$\boldsymbol{\varphi} = \left(\varphi_i = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^i} \,|\, i \in N\right), \qquad \boldsymbol{\psi} = \left(\psi_i = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial y^j} \,|\, i \in N\right), \tag{17}$$

будем иметь

$$J\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} + grad_x\, \boldsymbol{u}, \tag{18}$$

где оператором $J = J\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ является матрица Якоби.

Поскольку скалярный квадрат вектора (18) принимает вид

$$D(J\boldsymbol{\psi}) = D(\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\varphi} \cdot grad_x \boldsymbol{u} + (grad_x \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi} + grad_x \boldsymbol{u} \cdot grad_x \boldsymbol{u}, \tag{19}$$

то, пренебрегая малыми второго порядка и вводя оператор Гамильтона

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\varphi} \cdot grad_x, \tag{20}$$

приходим к следующему представлению тензора малых деформаций

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\nabla}), \tag{21}$$

компоненты которого в декартовой системе координат принимают вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right). \tag{22}$$

Замечание. В работе рассматривается деформация систем, не нарушающая структурную схему системы, т.е. с сохранением размерности $n = |N|$ координатных функций. В иерархических комплексах [1] соответствие размерностей в равенстве (21) определяет матрица Якоби.

Используемые источники.

1. Соловьёв А.С. Сетевое моделирование //"Экономика и социум" № 5(84), 2021. www.iupr.
2. Соловьёв А.С. Единство количества, качества и меры //"Экономика и социум", № 10(65), 2019.

3. Тарханов В.И. Геометрическая алгебра – язык творческого мышления //plotnikovna.narod.ru/ga.pdf