ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ СИМПЛЕКСА

Баходиров Н. И.

студент 1 курса Ташкентского государственного экономического университета

Пошаходжаева Г.Д.

кафедра «Высшей и прикладной математики»

Доцент, Ташкентского государственного экономического университета

Якубова У.Ш.

кафедра «Высшей и прикладной математики»

Доцент, Ташкентского государственного экономического университета

Аннотация: В данной статье рассматриваются проблемы сведения экономических задач к задаче линейного программирования и решения их симплекс-методом. Особое внимание уделяется использованию линейной алгебры и симплексных таблиц для решения задач линейного программирования.

Ключевые слова: симплекс метод, оптимальное решение, функция, таблица

TRANSFORMING ECONOMIC PROBLEMS INTO LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS AND SOLVING THE SIMPLEX METHOD

Bakhodirov N. I.

1st year student of Tashkent State University of Economics

Poshakhodjaeva G. Dj.

Department of Higher and Applied Mathematics

Associate Professor, Tashkent State University of Economics

Yakubova U. Sh.

Department of Higher and Applied Mathematics

Associate Professor, Tashkent State University of Economics

Annotation: This article focuses on the problems of bringing economic problems to the problem of linear programming and solving them by the simplex method. Emphasis is placed on using linear algebra and simplex tables to solve linear programming problems.

Key words: simplex method, optimal solution , function ,table

Введение

Идея симплексного метода (метода последовательного улучшения) заключается в том, что, начиная с некоторого исходного опорного решения, осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Симплекс-метод является универсальным, так как позволяет решить практически любую задачу линейного программирования, заданную в каноническом виде. Значение целевой функции при этом перемещении для задач на максимум не убывает. Так как число опорных решений конечно, то через конечное число шагов получим оптимальное опорное решение.

Симплексные таблицы и алгоритм решения .

Приведем здесь алгоритм решения задач симплексным методом.

1. Математическая модель задачи должна быть канонической. Если в исходной формулировке задача неканоническая, то ее надо привести к каноническому виду.

2. Находим исходное опорное решение и проверяем его на оптимальность. Для этого заполняем симплексную таблицу. Все строки таблицы 1-го шага, за исключением строки Δ_j (индексная строка), заполняем по данным системы ограничений и целевой функции.

Симплексная таблица имеет следующий вид.

c_i	Базисная переменная	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	$L(\overline{x})$
		x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	b_1
c_1	x_1	1	0	…	0	$h_{1,m+1}$	…	h_{1n}	f_1
c_2	x_2	0	1	…	0	$h_{2,m+1}$	…	h_{2n}	f_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_m	x_m	0	0	…	1	$h_{m,m+1}$	…	h_{mn}	f_m
Δ_j		0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_n	$L(\overline{x_1})$

Индексная строка Δ_j для переменных находится по формуле $c_i h_{ij}$

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i h_{ij} - c_j \text{ , } j = 1,n,$$

и по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i$$

- для свободного члена.

Возможны следующие случаи при решении задачи на максимум:

- если все оценки $\Delta_j \geq 0$, то найденное решение оптимальное;

- если хотя бы одна оценка $\Delta_j \leq 0$, но при соответствующей переменной x_j нет ни одного положительного коэффициента, решение задачи прекращается, так как $L(x) \to \infty$, т. е. целевая функция не ограничена в области допустимых решений;

- если хотя бы одна оценка отрицательная, а при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, то нужно перейти к другому опорному решению;

- если отрицательных оценок в индексной строке несколько, то в столбец базисной переменной (БП) вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка.

Пусть одна оценка $\Delta_k < 0$ или наибольшая по абсолютной величине $\Delta_k < 0$, тогда k-й столбец принимаем за ключевой. За ключевую строку принимаем ту, которой соответствует минимальное отношение свободных членов (b_i) к положительным коэффициентам k-го столбца. Элемент, находящийся на пересечении ключевых строки и столбца, называют ключевым элементом.

3. Заполняем симплексную таблицу 2-го шага: переписываем ключевую строку, разделив ее на ключевой элемент.

заполняем базисные столбцы;

остальные коэффициенты таблицы находим по правилу «прямоугольника». Оценки можно считать по приведенным ранее формулам или по правилу «прямоугольника». Получаем новое опорное решение, которое проверяем на оптимальность и т. д .

Примечания:

1. Если целевая функция L(x) требует нахождения минимального значения, то критерием оптимальности задачи является неположительность оценок Δ_j при всех j=1, n.

2. Правило «прямоугольника» состоит в следующем. Пусть ключевым элементом предыдущего шага является элемент 1-й строки (m + 1)-го столбца $h_{1,m+1}$. Тогда элемент i-й строки (m +2)-го столбца последующего шага, который обозначим $h_i`_{,m+2}$, по правилу «прямоугольника» определяется по формуле

$$h_i`_{,m+2} =(h_{1,m+1}\, h_{1,m+2} - h_{1,m+1}\, h_{1,m+2})/ h_{1,m+1} ,$$

где $h_{i,m+2}$, $h_{i,m+1}$, $h_{1,m+1}$ - элементы предыдущего шага.

2. Применение симплексного метода в задачах ЛП

Поясним применение симплексного метода.

Предприятие располагает тремя производственными ресурсами (сырьем, оборудованием, электроэнергией) и может организовать производство продукции двумя различными способами. Расход ресурсов и амортизация оборудования за

один месяц и общий ресурс при каждом способе производства дан в таблице (в ден. ед.).

Производственный ресурс	Расход ресурсов за 1 месяц		Общий ресурс
	1-й способ	2-й способ	
Сырье	2	4	8
Оборудование	2	2	6
Электроэнергия	4	2	16

При первом способе производства предприятие выпускает за один месяц 6 тыс. изделий, при втором - 8 тыс. изделий.

Сколько месяцев должно работать предприятие каждым из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

Решение. Составим математическую модель задачи. Для этого введем обозначения:

- x_1 - время работы предприятия первым способом,
- x_2 - время работы предприятия вторым способом.

Тогда задача ЛП формулируется следующим образом: найти максимум целевой функции

$$L(\overline{x}) = 3x_1 + 8x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$2x_1 + 4x_2 \leq 8,$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 6,$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 16,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Приведем задачу к каноническому виду, для чего добавим в правые части ограничений дополнительные неизвестные x_3, x_4 и x_5 (балансовые переменные) при ограничениях

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8,$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 6,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_5 = 16,$$
$$x_j \geq 0 \ j = 1,5.$$

Теперь составим симплексную таблицу 1-го шага:

c_i	БП	6	8	0	0	0	$L(\overline{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	2	4	1	0	0	8
0	x_4	2	2	0	1	0	6
0	x_5	4	2	0	0	1	16

Δ_j	-6	-8	0	0	0	0

$$\overline{x}_1 = (0, 0, 8, 6, 16),\ L(\overline{x}) = 0$$

В индексной строке Δ_j имеются две отрицательные оценки, значит, найденное решение не является оптимальным и его можно улучшить. В качестве ключевого столбца следует принять столбец базисной переменной x_2, а за ключевую строку− строку переменной x_3, где min (8/4, 6/2.16/2) = min (2, 3, 8) = 2.

Ключевым элементом является «2». Вводим в столбец БП переменную x_2, выводим x_3. Составляем симплексную таблицу 2-го шага :

c_i	БП	6	8	0	0	0	$L(\overline{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
8	x_2	1/2	1	1/4	0	0	2
0	x_4	1	0	-1/2	1	0	2
0	x_5	3	0	-1/2	0	1	12
Δ_j		-2	0	2	0	0	16

$$\overline{x_2} = (0, 2, 0, 2, 12),\ L(\overline{x_2}) = 16 .$$

В индексной строке имеется одна отрицательная оценка. Полученное решение можно улучшить. Ключевым элементом является «1». Составляем симплексную таблицу 3-го шага:

c_i	БП	6	8	0	0	0	$L(\overline{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i

8	x_2	0	1	1/2	-1/2	0	1
6	x_1	1	0	-1/2	1	0	2
0	x_5	0	0	1	-3	1	6
Δ_j		0	0	1	2	0	20

Все оценки свободных переменных $\Delta_i \geq 0$, следовательно, найденное опорное решение является оптимальным:

$$\overline{x}_{опт} = (2, 1, 0, 0, 6) , L(\overline{x})_{max} = 20 .$$

Ответ. Первым способом предприятие должно работать два месяца, вторым - один месяц, при этом максимальный выпуск продукции составит 20 тыс. ед.

Заключение : Решение задачи линейного программирования симплекс-методом является универсальным методом, не ограничивающим число переменных, как графический метод. Кроме того, алгоритм решения задачи линейного программирования симплекс-методом доступен во многих практических приложениях. В частности, задачу линейного программирования можно решить простым способом с помощью программ MS Excel, POM QM для Windows.

Использованная литература :

1. М. С. Красс, Б. П. Чупрынов . МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ // Симплексный метод . − С 267 -271,

2. https://academiaone.org/index.php/7/article/view/360/293 .

3. Х. Э. КРЫНЬСКИЙ . МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ // Симплексный метод .

4. МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ // Симплексный метод//УЧЕБНИК.