LI ALGEBRASINING DIFFERENSIALLASHLARI

Abriyev N. T

Assistent, Jizzax politexnika instituti

Annotatsiya: Bu ishda Li algebrasi haqida tushunchalar keltirilgan. Barcha uch o‘lchamli kompleks Li algebralari biriga izomorf bo‘lishi keltirilgan. Li algebrasining differensiallanishini ko‘rib chiqamiz.

Kalit so’zlar: Li algebrasi, ichki differensiallash, vektor, operator, gomomorfizm, maydon.

Дифференциалы алгебры Ли

Абриев Н. Т

Ассистент, Джизакский политехнический институт

Аннотация: Эта работа дает представление об алгебре ли. Показано, что все трехмерные комплексные алгебры Ли изоморфны одной. Рассмотрим дифференцирование алгебры Ли.

Ключевые слова: алгебра Ли, внутреннее дифференцирование, вектор, оператор, гомоморфизм, поле.

Li algebra differentials

Abriyev Nematillo

Assistant Jizzakh Polytechnic Institute

Abstract: This work gives an idea of lie algebra. It is shown that all three-dimensional complex Lei algebras are isomorphic to one. Consider the differentiation of the Lei algebra.

Keywords: Lie algebra, internal differentiation, vector, operator, homomorphism, field.

Algebralarning differensiallanishilarini ko‘rib chiqishda ba’zi bir chiziqli Li algebralari tabiiy ravishda paydo bo‘ladi. Qism $F-$ algebralari (assotsativ bo‘lishi shartmas) biz shunchaki F maydon ustidagi D vektor fazoni tushunamiz, $D\times D \quad D$, belgilanish odatda olinadi, (to’rtburchakli qavs ishlatilganda Li algebraning holati bundan mustasno). $D-¿$algebra bo‘yicha differensiallash deganda $\delta : D \quad D$ chiziqli xarakterlashni tushunamiz, differensiallash qoidasi quyidagi $\delta(ab)=a\delta(b)+\delta(a)b$

qoidani bajaradi. $D-¿$algebra barcha differensiallarning $DerD$ to‘plamini $EndD$ vektorning qism fazo ekanini tekshirish oson. U holda $DerD-¿$ algebra $gl(D)$ da qism algebra.

Li algebra L ko‘rsatilgan ma’noda $F-¿$algebra bo‘lgani uchun ta’rif bo‘yicha $DerL$ algebra. Ba’zi bir farqli differensiallash quyidagicha paydo bo‘ladi. Agar $x \in L$, L fazoda quyidagi $y \mapsto [x,y]$ akslantirishda endomorfizm bo‘ladi, u holda uni ad_x deb belgilaymiz. Bu haqiqatdan ham $ad_x \in DerL$, chunki biz Yakobi identifikatorini ($(L_2)'$ hisobga olgan holda) quyidagi shaklda qayta yozishimiz mumkin:

$[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]$. Bunday ko‘rinish ichki, qolganlari esa tashqi differensiallash deb ataladi. Albatta, $x \neq 0$ uchun $x=0$ bo‘lishi mumkin: Masalan, har qanday bir o‘lchovli Li algebrasida shunday bo‘ladi. $x \mapsto ad_x$ shaklga ega bo‘lgan L $DerL$ akslantirilsa L algebrasining qo‘shma tasviri deb ataladi. Keyingi barcha holatlarda u hal qiluvchi ro‘l o‘ynaydi.

Ba’zan biz x ni bir vaqtning o‘zida L algebra va uning K qism algebra elementi deb hisoblashimiz kerak. Chalg‘imaslik uchun $ad_L x$ va $ad_K x$ yozuvlari x elementining navbati bilan L va K da ishlashi uchun ishlatiladi. Masalan, agar x diagonal matritsa bo‘lsa, u holda $ad_{0(n,F)}(x)=0$ bo‘ladi va $ad_{gl(n,F)}(x)=0$ nol bo‘lish shart emas.

Yuqorida chiziqli Li algebralarining ba’zi bir asosiy misollarini ko‘rib chiqdik. Ma’lumki, har qanday (chekli o‘lchovli) algebra ba’zi bir chiziqli Li algebralar uchun izomorfdir (Ado va Ivasavi teoremalari). Bu yerda bu so‘z isbotlanmagan; shunday bo‘lsa-da, bu bizni qiziqtirgan barcha holatlarda o‘zgarmas natija ekanligi dastlabki bosqichda aniq bo‘ldi.

Biroq, ba’zida Li algebralarini abstrak holda ko‘rib chiqish maqsadga muofiqdir. Masalan, agar L, F ning ustida ixtiyoriy chekli o‘lchovli vektor maydoni bo‘lsa, u holda uni hamma $x,y \in L$ uchun $[x,y]=0$ deb, Li algebrasiga aylantirish mumkin. Trivial ko‘paytmali bunday Li algebrasi abeliyan deb nomlanadi (chunki chiziqli holatda $[x,y]=0$ tenglik $x$va y kommutativlikni bildiradi). Agar $x_1,\ldots,x_n$ asosli $L-¿$Li algebra bo‘lsa, unda uning butun ko‘paytma jadvali $[x_i,x_j]=\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k x_k$ algebra ifodalarida paydo bo‘ladigan a_{ij}^k o‘zgarmasdan tuzilishi mumkinligi aniq. Qolaversa L_1, $(L_2¿¿'$ xossalari tufayli qolganlari uchun tiklanadigan $i\geq j$ konstantalari. Aksincha, abstrak Li algebrasini tuzilish konstantalari to‘plami bilan boshidanoq aniqlash mumkin. Tabiiyki, har bir shkalalar to‘plami $\{a_{ij}^k\}$ mos emas, u holda quyidagi identifikatorlar orqali $(L¿¿2)¿$ va $(L¿¿3)¿$ dan kelib chiqadigan matritsalarni qo‘yish kifoya ekanligini ko‘rsatadi:

$$a_{ij}^k=0=a_{ij}^k+a_{ji}^k;\sum_k (a_{ij}^k a_{kl}^m¿+a_{li}^k a_{kj}^m)=0¿ \quad (1)$$

Yuqoridagi Li algebralarini bunday sun’iy usulda qurishimiz shart emas. Ammo abstrak yondashuvni qo‘llash sifatida biz eng katta o‘lchamdagi barcha ikki o‘lchovli Li algebralarini (izomorfizmgacha) topishimiz mumkin.

1-o‘lchov ko‘paytirish jadvali $[x,x]=0$ bo‘lgan bitta asosli vektor x ga ega (qarang $(L_2¿$). 2-o‘lchovli bo‘lsa, $L-¿$da x,y bazisini tanlang. L algebradagi barcha hosilalar $[x,y]$ ga mutanosib ekanligi aniq. Agar ularning barchasi 0 ga teng bo‘lsa, u holda L algebrasi abeliviy bo‘ladi, aks holda x ning asosini oldingi $[x,y]$ ning ko‘paytmasi bo‘lgan har qanday vektor bilan almashtirish mumkin va y sifatida biz yangi x vektordan mustaqil har qanday vektorni olishimiz mumkin. Quyidagi $[x,y]=ax(a\neq 0)$ y ni $a^1 y$ bilan almashtirsak, $[x,y]=x$ hosil bo‘ladi. Shunday qilib, eng ko‘p abel bo‘lmagan ikki o‘lchovli Li algebrasi mavjud.

Ta’rif.1. $(A,+,\cdot,\lambda)$ Li algebrasi, $d:A \quad A$ chiziqli almashtirish bo‘lsin. Agar $\forall\ x,y\in A$ elementlar uchun quyidagi shartni qanoatlantirsa

$$d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)] \quad (2)$$

u holda bu chiziqli almashtirishga differensiallash deyiladi.

Ta’rif.2. Agar $(A,+,\cdot,\lambda)$ Li algebrasi bo‘lsa $ad_x:A\rightarrow A$, $ad_x(y)=yx$ operatori differensiallash bo‘ladi.

Haqiqatdan ham

$$ad_x(y+z)=(y+z)x=yx+zx=ad_x(y)+ad_x(z)$$

$$ad_x(\lambda y)=(\lambda y)x=\lambda(yx)=\lambda ad_x(y)$$

$$ad_x(yz)=(yz)x=-(xy)z-(zx)y=(yx)z+y(zx)=¿[ad¿¿x(y),z]+[y,ad¿¿x(z)]¿¿$$

A algebraning barcha differensiallashlari to‘plami $Der(A)$ kabi belgilanadi. ad_x ko‘rinishidagi differensiallashlar ichki differensiallashlar deyilib, barcha ichki differensiallashlar to‘plami $Inn(A)$ kabi belgilanadi. Ma’lumki, Li algebrasining barcha differensiallashlar to‘plami algebraning 1-kosikllarini, ichki differensiallashlar to‘plami esa 1-kochegaralarini beradi.

Ma’lumki, agar D_1, D_2 operatorlar A algebraning differensiallashlari bo‘lsa, u holda $D_1 D_2 - D_2 D_1$ ham A algebrada differensiallash bo‘ladi. U holda $Der(A)$ to‘plam kommutator amaliga nisbatan Li algebrasini tashkil qiladi.

Bizga A Li algebrasi va qandaydir V chiziqli fazo berilgan bo’lsin.

Ta’rif. 3. G algebraning tasviri deb $\varphi : A \rightarrow gl(V)$ gomomorfizmga aytiladi. Agar φ gomomorfizmning yadrosi nolga teng bo‘lsa, u holda u aniq tasvir deyiladi. Ta’kidlash joyizki, berilgan φ tasvir orqali, $\forall\ a \in V, \forall\ x \in A$ uchun

$$a \cdot x = \varphi(x) a$$

kabi amal aniqlasak Vchiziqli fazoda $A -¿$modul strukturasi aniqlanadi.

Teorema.1. Barcha uch o‘lchamli kompleks Li algebralari quyidagi algebralardan biriga izomorf bo‘ladi:

A_0: Abel

$A_1 : [e¿¿1, e_2] = e_3¿;$

$A_2 : [e¿¿1, e_2] = e_1¿;$

$A_3 : [e¿¿1, e_2] = e_2, [e¿¿1, e_3] = e_2 + e_3¿¿;$

$A_4 : [e¿¿1, e_2] = e_2, [e¿¿1, e_3] = \lambda e_3, \lambda \in C^{¿}, |\lambda| \le 1¿¿;$

$A_5 : [e¿¿1, e_2] = e_3, [e¿¿1, e_3] = -2e_1, [e¿¿2, e_3] = -2e_2¿¿¿;$

Lemma.1. $A_1 : [e¿¿1, e_2] = e_3¿$ differensiallash bo‘lishligini ko‘rsatib o‘tamiz.

$d(e_1) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$

$d(e_2) = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3.$

$d(e_3) = d¿ = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) e_2 + + e_1 (\beta_1 e¿¿1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) = \alpha_1 e_3 + \beta_2 e_3 = (\alpha¿¿1 + \beta_2) e_3 = 0¿¿$

$d(e_3) = (\alpha¿¿1 + \beta_2) e_3¿,$

A algebra differensiallashining matritsaviy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi.
$$Der(A)=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ 0 & 0 & \alpha_1+\beta_2\end{pmatrix}$$

$ad_x : A \to A, ad_x(y)=[y,x],\ InnD(L)=\{ad_x, x\in L\}.$

$A := [e¿¿1, e_2]=e_3¿$ ichki differensiallash bo‘lishlikka tekshiramiz.

$$ad_{e_1}(e_1)=0, ad_{e_1}(e_2)=-e_3, ad_{e_1}(e_3)=0$$

$$ad_{e_2}(e_1)=e_3, ad_{e_2}(e_2)=0, ad_{e_2}(e_3)=0$$

$$ad_{e_3}(e_1)=0, ad_{e_3}(e_2)=0, ad_{e_3}(e_3)=0$$

$$E_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$-e_1E_1+e_2E_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha_2\\ 0 & 0 & \alpha_1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ 0 & 0 & \alpha_1+\beta_2\end{pmatrix}\supset\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha_2\\ 0 & 0 & \alpha_1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$Inn(A)=¿2.$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Jibladze, M., Pirashvili,T. Leibniz algebras and μ-groups (In preparation).
2. Jibladze, M., Pirashvili,T. Cohomology of algebraic theories. J. Algebra 137, 253–296 (1991).
3. Loday J. L. Cyclic Homology. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 301, p. xviii+454. Springer, Berlin (1992). (ISBN:3-540-53339).