

УДК 519.688

Дехканов Г., Мурадов Р.

Наманганский инженерно-технологический  
институт, Наманган, Узбекистан

## ОБ ОДНОМЕРНОМ И МНОГОМЕРНОМ ГИДРОЛОГИЧЕСКОМ ЧАСТОТНОМ АНАЛИЗЕ

**Аннотация.** В данной статье основное внимание уделяется многомерному гидрологическому частотному анализу в гидрологических исследованиях и исследуются часто используемые распределения, критерии и методы оценки. Подчеркивается, что функция копулы играет важную роль в гидрологическом анализе.

**Ключевые слова.** Частота, анализ, распределение, норма, критерии, статистические оценки, функция копулы.

UDK 519.688

Dekhkanov G., Muradov R.

Namangan Institute of Engineering  
and Technology, Namangan, Uzbekistan

## ON UNIVARIATE AND MULTIVARIATE HYDROLOGICAL FREQUENCY ANALYSIS

**Abstract.** This paper focuses on multivariate hydrological frequency analysis in hydrological research and examines commonly used distributions, criteria and estimation methods. It is emphasized that the copula function plays an important role in hydrological analysis.

**Keywords.** Frequency, analysis, distribution, norm, criteria, statistical estimates, copula function.

**Введение.** Одномерная гидрологическая частота играет важную роль в оценке повторяемости наводнений или осадков, которая используется для проектирования таких сооружений, как плотины, мосты, водопропускные трубы, дамбы, автомагистрали, очистные сооружения, гидротехнические сооружения и промышленные здания. Используя одномерный метод гидрологического частотного анализа, можно оценить вероятность данного события, а также рассчитать величину расчетного количества осадков или наводнений за  $T$ -год.

**Основная часть.** Основная цель одномерного гидрологического частотного анализа состоит в том, чтобы установить взаимосвязь между величиной паводка или дождя и интервалом повторяемости или периодом повторяемости.

Процедуры гидрологического частотного анализа в основном включают два этапа: выбор подходящего родительского распределения и оценку параметров выбранного распределения. Распределение для одномерного гидрологического анализа обсуждалось и исследовалось во многих исследованиях. В исследованиях гидрологической частоты использовались многочисленные модели распределения вероятностей, в том числе двухпараметрические распределения, т.е. распределения Гумбеля, Вейбулла, гамма и логнормальное (Du и др. 2015; Giraldo и Garcna 2012; Jiang и др. 2015; Villarini и др. 2009). Обычно используемые в гидрологии распределения суммированы в таблице 1.

Таблица 1

Распределения	Функция плотности	Параметры
Нормальный	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, x \in R$	$\sigma > 0$ – параметр масштаба $\mu$ – параметр местоположения
Гамма	$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{x}{\beta}\right\}, x \in R$	$\alpha > 0$ – параметр формы $\beta$ – параметр масштаба
Гумбель	$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}, x \in R$	$\sigma > 0$ – параметр масштаба $\mu$ – параметр местоположения

Чтобы определить, может ли модель распределения правильно соответствовать ряду данных, можно использовать определенные критерии согласия, такие как критерии Колмогорова-Смирнова, Андерсона-Дарлинга и критерий Хи-квадрат.[2-4]

Методами оценки параметров, которые широко используются для одномерного гидрологического частотного анализа, являются метод моментов (ММ), метод максимального правдоподобия (ММП) и метод L-моментов. Ограничением ММ является то, что на моменты рядов данных в равной степени влияют малые значения, а на более высокие моменты (например, коэффициент вариации и асимметрии) сильно влияют крайности в рядах данных Haddad и Rahman, (2011). Альтернативным методом ММ

является машинное обучение для оценки параметров распределения. Haddad и Rahman (2011) указали, что ММП в большинстве случаев является надежным методом и обеспечит оценщикам хорошие статистические свойства. Другой метод, L-моменты, настоятельно рекомендуется многими исследователями. На этот метод меньше влияют крайности в рядах данных Hosking (1990). Кроме того, L-моменты придают больший вес более крупным значениям в гидрологическом ряду и, следовательно, как ожидается, обеспечат лучшее соответствие верхнему хвосту распределения Wang (1997).

Упомянутый выше метод в основном ориентирован на одномерный гидрологический анализ. Сложное явление часто характеризуется множеством аспектов. Некоторые гидрологические явления описываются двумя или более коррелирующими характеристиками. Например, для события наводнения, которое можно охарактеризовать пиком наводнения, величиной и продолжительностью наводнения, одномерного анализа распределения вероятностей, по-видимому, недостаточно, поскольку эти три случайные величины не являются взаимно независимыми из-за многомерного характера явления. Для системы с двумя или более переменными период повторяемости не равен периоду вынужденной возвратности переменной (Hawkes et al. 2002). В случае оценки частоты наводнений простой анализ пиковых значений паводков или повторяемости объемов паводков приведет к недооценке или переоценке риска (Де Мишель и др., 2005 г.; Юэ и Расмуссен, 2002 г.). Следовательно, для более сложного гидрологического явления с большим количеством переменных требуется многомерный статистический анализ (Гримальди и Серинальди, 2006а, б).

Поскольку гидрологические явления обычно описываются двумя или более коррелирующими переменными, требуется многомерный статистический анализ и анализ зависимостей. Наиболее важной проблемой многомерного вероятностного анализа является построение структуры зависимостей для задействованных коррелированных случайных величин (Ли и Чжэн, 2016). Многомерные функции распределения широко используются в литературе для моделирования двух или более зависимых гидрологических переменных и структуры их зависимости (Сальвадори и Де Мишель, 2007). Многомерный гидрологический анализ в основном включает в себя следующие три элемента: (а) демонстрация важности и объяснение полезности многомерной структуры, (б) подбор соответствующего многомерного распределения для моделирования гидрологического явления и оценка соответствующих параметров, и (с) изучение многомерных периодов повторяемости или другой соответствующий гидрологический анализ и моделирование (Chebana and Ouarda 2011).

В последние годы в гидрологических и экологических приложениях были внедрены некоторые многомерные подходы. Наиболее широко используемой совместной кумулятивной функцией распределения является функция Гаусса, но она имеет ограничение: предельные распределения должны быть нормальными. Затем были предложены двумерные распределения с ненормальными маргинальными, такие как двумерное экспоненциальное, двумерное гамма и двумерное распределение экстремальных значений. Некоторые авторы резюмировали недостатки этих типов распределений: 1) для каждого предельного распределения требуется одно и то же семейство; 2) расширения на случай, выходящий за рамки двумерного, не ясны, и 3) параметры маргинальных распределений также используются для моделирования зависимости между случайными величинами.

В последнее десятилетие копулы использовались для многомерного гидрологического анализа. Favre и др. (2004) использовали 2-копулу для описания зависимости между пиком потока и объемом. Shiau и др. (2006) проанализировали двумерную частоту пика и объема паводка. Zhang и Singh (2006) использовали архимедовы копулы для построения двумерных распределений пика и объема паводка, пика и продолжительности паводка, а также объема и продолжительности паводка. Grimaldi и Serinaldi (2006) построили трехмерное совместное распределение переменных событий наводнения, используя полностью вложенные или асимметричные функции архимедовой копулы, и провели обширное моделирование, чтобы подчеркнуть различия с хорошо известными симметричными архимедовыми копулами. Salvadori и Michele (2007) представили некоторые достижения в гидрологическом моделировании с использованием копул, такие как расчет условных вероятностей и периодов повторяемости двумерных событий. Zhang и Singh (2007a) использовали копулу Gumbel–Hougaard для получения трехмерных распределений пика, объема и продолжительности паводка. Kao и Govindaraju (2008) исследовали неархимедову копулу из семейства Plackett и применили ее к изучению временного распределения экстремальных осадков. Serinaldi и др. (2009) применили копулы для вероятностного анализа характеристик засухи. До сих пор использование копул в гидрологии и водных ресурсах можно резюмировать следующим образом: анализ частоты осадков (Michele и Salvadori, 2003 г.; Grimaldi и Serinaldi, 2006 г.; Kao и Govindaraju, 2007 г.; Zhang и Singh, 2007 г.; Kuhn e и др., 2007 г.; и Keef и др., 2009 г.), анализ частоты наводнений (Favre и др., 2004 г.; Shiau и др., 2006 г.; Zhang и Singh, 2006, 2007b; Renard и Lang, 2007 г.; Xiao и др., 2009 г.), анализ частоты засух (Shiau, 2006 г.; Kao и Govindaraju). 2010; Song и Singh, 2010), анализ морских штормов (Michele и др., 2007), моделирование рек (Chen и

др., 2015) и некоторые другие теоретические анализы многомерных экстремальных задач (Salvadori и др., 2007; Salvadori и Michele, 2010).

Копулы — удобный инструмент для описания зависимости между случайными величинами. Эти функции впервые были введены в 1959 Абе Скларом в качестве ответа на вопрос Фреше о связи между многомерными вероятностными распределениями с их маргинальными распределениями меньшей размерности. Он доказал очень важное утверждение, которое стало основой копула методологии и согласно которому совместные распределения образуются соединением вместе одномерных маргинальных распределений с использованием совместных распределений на единичном кубе.

Имея более чем пятидесятилетнюю историю, копулы за последние 10-12 лет стали интересны и полезны при решении различных статистических задач. Большую роль в этом случае сыграла и книга Nelsen [5] (Nelsen R.B. An introduction to copulas. Springer. 2006), первое издание которой вышло в 1999 году. Как показывают исследования последних десяти лет, возможности копульных функций в статистике огромны и их можно успешно использовать при решении самых разных статистических задач, что также является темой данной статьи.

Таким образом, функция копулы оказалась очень полезным и эффективным инструментом для многомерного гидрологического анализа и моделирования.

### **Использованная литература**

1. Du T, Xiong L, Xu CY, Gippel CJ, Guo S, Liu P (2015) Return period and risk analysis of nonstationary low-flow series under climate change. *J Hydrol* 527:234–250.
2. Haddad K, Rahman A (2011) Selection of the best fit flood frequency distribution and parameter estimation procedure: a case study for Tasmania in Australia. *Stoch Environ Res Risk Assess* 25:415.
3. Li F, Zheng Q (2016) Probabilistic modelling of flood events using the entropy copula. *Adv Wat Res* 97:233–240, ISSN 0309-1708 <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2016.09.016>.
4. Durivage, Mark Allen Practical engineering, process, and reliability statistics, ASQ Quality Press, 2015.
5. Nelsen R.B. An introduction to copulas. Springer. 2006.
6. Peter W. M. John Statistical Methods in Engineering and Quality Assurance, John Wiley & Sons, 1990.

7. Yue S, Rasmussen P (2002) Bivariate frequency analysis: discussion of some useful concepts in hydrological application. *Hydrol Process* 16:2881–2898.
8. Wang QJ (1997) LH moments for statistical analysis of extreme events. *Water Resour Res* 33(12):2841–2848.