Бахтиёров Д. Н.
Студент БХА 01/24
Ташкентского государственного экономического университета
Узбекистан, Ташкент

Бахтиёров С.
Студент БИА 04/24
Ташкентского государственного экономического университета
Узбекистан, Ташкент

Пошаходжаева Г. Д.
Доцент
Ташкентского государственного экономического университета
Узбекистан, Ташкент

Хаитметов А. А.
Старший преподаватель
Ташкентского государственного экономического университета
Узбекистан, Ташкент

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ В ПЛАНИРОВАНИИ

Аннотация: в настоящей работе было изучено матричный и геометрический метод решения задач линейного программирования. Целью является как можно применить эти методы в планировании.

Ключевые слова: линейное программирование, матрица, затраты, граничными условиями, условиями сбалансированности плана, область допустимых решений, вектор, функция.

Bakhtiyorov D.N.

Student BHA 01/24
Tashkent State University of Economics
Uzbekistan, Tashkent

Bakhtiyorov S.
BIA student 04/24
Tashkent State University of Economics
Uzbekistan, Tashkent

Poshakhodjaeva G.D.
Associate Professor
Tashkent State University of Economics
Uzbekistan, Tashkent

Khaitmetov A. A
Senior Lecturer
Tashkent State University of Economics
Uzbekistan, Tashkent

ELEMENTS OF LINEAR PROGRAMMING AND ITS APPLICATION IN PLANNING

Abstract: In this paper, the matrix and geometric methods of solving linear programming problems were studied. The goal is to see how these methods can be applied in planning.

Key words: linear programming, matrix, costs, boundary conditions, plan balance conditions, feasible solution domain, vector, function.

Сущность линейного программирования. В практике экономического планирования на любом его уровне возникает необходимость выбора оптимального варианта среди различных вариантов плана. Однако, как правило, интуиция и опыт планирования оказываются здесь недостаточными. Поэтому в планировании необходимы точные методы, которые дают возможность сопоставлять различные варианты плана и выбирать оптимальный вариант. Один из методов, облегчающих выбора оптимальных вариантов плана,-так называемое ***линейное программирование.***

Задачу нахождения оптимального производственного плана математически можно сформулировать следующим образом.

Дана матрица ***B*** коэффициентов материальных затрат и матрица ***M*** норм расхода производственных ресурсов. Определить оптимальный план выпуска продукции, т.е. такой план, в котором выражение

$W=W_1+W_2$

принимает максимальное значение; при этом должны удовлетворяться совместно следующие условия:

$$\begin{aligned} W_1+3W_2 &\leq 1000 \\ 3W_1+2W_2 &\leq 1000 \qquad (1) \\ 3W_1+W_2 &\leq 1350 \end{aligned}$$

$$W_1\geq 0,\ \ W_2\geq 0 \qquad (2)$$

Неравенство (1) представляют собой определенные ограничения свободы выбора вариант плана; они называются *условиями сбалансированности плана,* а неравенства (2) – *граничными условиями.*

Решения такого рода задач и составляет предмет линейного программирования. Приведенный пример поясняет также и общий характер задач линейного программирования указывает, что их решение состоит в определении оптимальных планов, причем математическом выражении этих задач фигурируют только линейные уравнения или неравенства, в которых есть только неизвестные в первой степени.

В общем виде сущность линейного программирования можно сформулировать следующим образом. Имеется n переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$.

Определить максимум(или минимум) следующей линейной формы, называемой *целой функцией*, этих переменных:

$$z=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n, \qquad (3)$$

причем удовлетворяются *балансовые условия:*

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leq b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leq b_2 \quad (4)$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leq b_m$$

и граничные условия:

$$x_i\geq 0(i=1,2,\ldots,n). \quad (5)$$

С экономической точки зрения *задачи линейного программирования*-это задачи оптимального использования ресурсов. В каждом случае планирования производства необходимо иметь в виду, что разные производственные ресурсы (рабочая сила, сырье, материалы, орудия производства) ограниченны. В каждом таком случае известна норма расхода этих ресурсов на разные виды продукции и в каждом случае возможны многообразные варианты распределения производственных ресурсов. Задача состоит в том, чтобы найти оптимальное распределение производственных ресурсов. При этом критерии оптимальности могут быть разными. Такими критериями могут, например, быть максимум выпуска продукции, максимум прибыли, максимум издержек производства и т.д.

Пример. Производство делиться на две отрасли, причем матрица коэффициентов материальных затрат есть (B-коэффициент материальных затрат)

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Матрица полных коэффициентов полных затрат есть

$$(I-B)^{-1}=\begin{bmatrix} 50/28 & 40/28 \\ 20/28 & 70/28 \end{bmatrix}$$

На вступительном этапе разработки плана приняты следующие 3 варианта объёма конечного продукта.

Отрасль	Варианты объёма конечного продукта		
	1	2	3
1	28	28	56
2	56	28	84

Из уравнения

$$\boldsymbol{W} = (I - B)^{-1} * W$$

Получаем:

$$\begin{pmatrix} W2 \\ W1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 50/28 & 40/28 \\ 20/28 & 70/28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \end{bmatrix}$$

Где w1 и w2- стоимость конечных продуктов, а W1 и W2- стоимость конечной продукции

Получаем соответствующие варианты плана выпуска продукции

Отрасль	Варианты плана выпуска продукции		
1	130	90	220
2	160	90	250
Всего	290	180	470

Для выполнения производственного плана необходима рабочая сила и орудия производства. Эти факторы производства имеются в ограниченных количествах, а их ограниченность не позволяет произвольно увеличивать выпуск продукции. Пусть ресурсы рабочей силы ***A*** составляют 100 единиц производственная мощность орудий ***B*** и ***C*** составляют соответственно 1000 и 1500 единиц. Известны также нормы расходы производственных ресурсов на единицу продукции в стоимостном выражении

Вид ресурсов	Затраты ресурсов на продукции	единицу времени отрасли
	1	2

A	1	3
B	3	2
C	3	1

Очевидно, что должно выполниться условия:

$$W_1+3W_2\le 1000$$

$$3W_1+2W_2\le 1000$$

$$3W_1+W_2\le 1350$$

Имеющие в наличии производственные ресурсы, соответствующие намеченным вариантам плана, составляют:

Вид ресурсов	Наличие ресурсов						
			1	2		3	
			(3)/(2)*100	(5)/(2)*100		(7)/(2)*100	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
A	1000	610	61	360	36	970	97
B	1000	710	71	450	45	1160	116
C	1350	550	55	360	36	910	91

Сопоставление вариантов плана показывает, что из трех намеченных вариантов наилучшем будет первый вариант. Во втором варианте степень использования производственных ресурсов слишком мала, третий же вариант невозможен, ибо его осуществление потребовало бы больше ресурсов, чем имеется в наличии.

Это не означает, что первый вариант- оптимальный, т.е. такой, в котором стоимость выпускаемой продукции максимально. Существует весьма много еще и других вариантов, из которых по меньшей мере один может быть оптимальным.

Геометрический метод решения задач линейного программирования.

В случае, когда в программе (плане) фигурируют только две переменные, задача линейного программирования может быть без труда решена геометрическим способом.

Пусть целевая функция переменнкх x_1 и x_2 есть

$$z=p_1x_1+p_2x_2\ (p_1,\ p_2>0) \qquad (1)$$

и балансовые условия

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2\leq c_1 \qquad (2)$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2\leq c_2 \qquad (3)$$

где $a_{ij}>0\ (i,j=1,2)$ и $c_1,\ c_2>0,$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0. \qquad (4)$$

Следует найти такие значения переменных x_1 *и* x_2 , чтобы выполнялись условия (2)-(4) и чтобы целевая функция (1) принимала наибольшее значение.

Балансовые условия можно представить в прямоугольной системе координат Ox_1x_2 на плоскости с помощью прямых L_1,L_2 (рис. 1). Неравенство (2) удовлетворяют координаты всех точек плоскости находящихся на прямой L_1 или под ней, а неравенству (3) удовлетворяют координаты всех точек, лежащих на прямой L_1 или под ней. Эту *область допустимых решений* образуют точки первого квадранта системы координат, лежащие под прямыми L_1 и L_2 или из них, т.е. координаты всех точек четырехугольника ОАБС на рис.1.

Если в целевой функции значение z есть переменная величина, то уравнение (1) описывает семейство параллельных прямых вида:

$$x_2=(-p_1/p_2)*x_1+(z/p_2) \qquad (5)$$

Чем больше z, т.е. чем больше мера осуществления цели, тем выше расположена соответствующая прямая семейства параллельных прямых.

Как видно на рис.1 оптимальное решение суть координаты точки пересечения прямых ДД, ибо через эту точку проходит наиболее высоко расположенная прямая из семейства прямых (5), имеющая по меньшей сере одну точку, общую с областью допустимых решений.

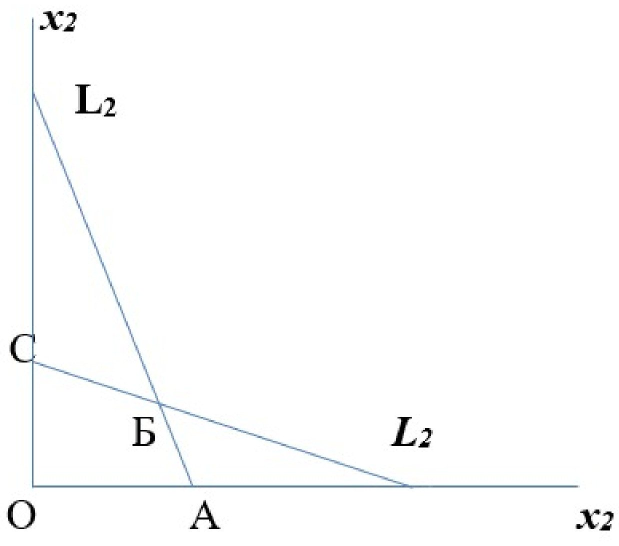

Рис.1

Пример 2. Дана целевая функция двух переменных $x1$ и $x2$:

$$z=2x1+3x2 \qquad (1)$$

Балансовые условия имеют вид:

$$\begin{cases} -2x1+x2\leq 2 \\ -x1+3x2\leq 9 \\ 4x1+3x2\leq 24 \end{cases} \qquad (2)$$

Причём граничные условия таковы:

$$x_1\geq 0\ ,\ x_2\geq 0. \qquad (3)$$

Найти такие значения $x1$ и $x2$, при которых целевая функция принимает максимальное значение.

Определим вначале область решений неравенств (1)-(3). Проставив в выражениях (1)-(3) знаки равенства вместо знаков неравенство, получим уравнения соответствующих прямых; записывая эти уравнения в отрезках получим:

$$-x1+x2/2=1$$

$$-(x1/9)+x2/3=1 \qquad (2)$$

$$(x1/6)+x2/8=1$$

$$x1=0\ x2=0 \qquad (3)$$

Нарисуем эти прямые (рис.2).

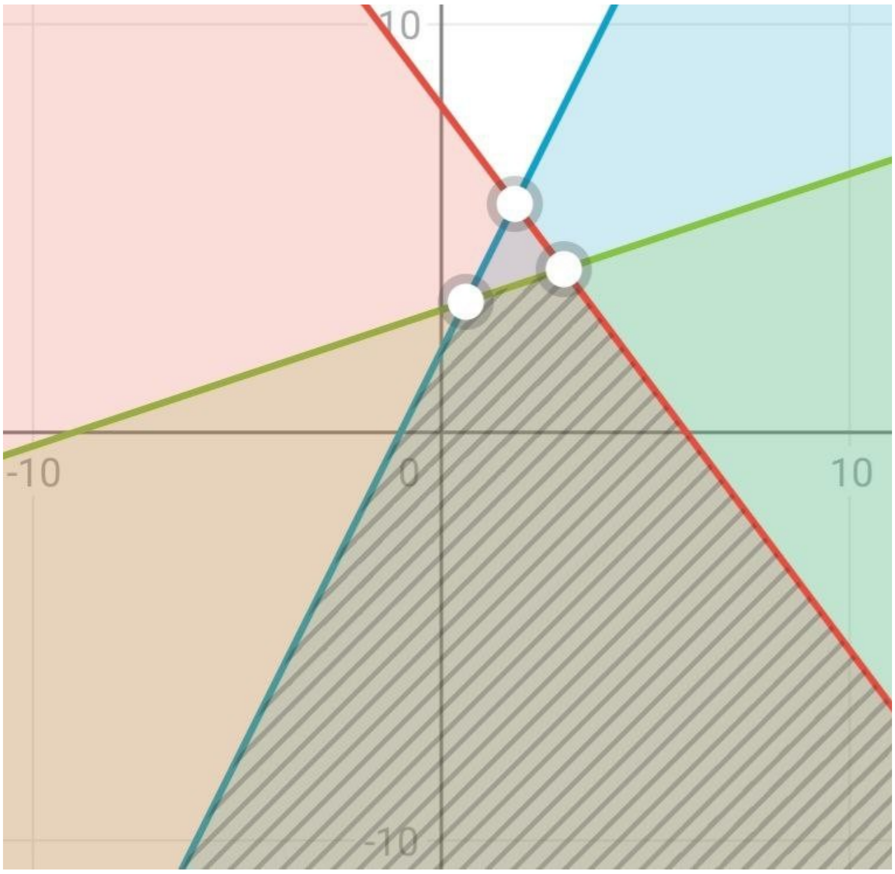

Рис.2

По рисунке можем определить область допустимых решений. (Закрашенная часть).

Уравнение

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{2x}1+\boldsymbol{3x}2 \qquad (1)$$

есть уравнения семейства прямых, перпендикулярных к вектору с координатами 2, 3. Из рис.2. видно что наиболее высоко расположенная прямая перпендикулярная к вектору ***м*** и имеющая точку, общую точку с областью допустимых решений прямая, проходящая через точку пересечения прямых $(-x1+3x2=9)$ **и (**$4x1+3x2=24$**).**

Чтобы найти координаты точки пересечения прямых следует решить систему уравнений:

$$-x1+3x2=9 \quad \text{и} \quad 4x1+3x2=24$$

Из первого уравнения получаем:

$$x1=¿\,3x2\text{-}9$$

Подставим это значение на второе выражение:

$$4*(3x2\text{-}9)+3x2=24 \text{ или } 15x2=60,$$

Откуда

$$x2=4, \quad x2=3$$

Максимальное значение целевой функции равен:

$$z=18$$

Следовательно, когда переменные x1 и x2 принимают значение 3 и 4,соответсвенно, целевая функция достигнет своего максимального значения.

Список использованной литературы

1. Ашманов С. А. “Линейное программирование”.
2. Палий И. А. “Линейное программирование”.
3. В. И. Бахтин, И. А. Иванишко “Линейное программирование”.