Ф.А.Ахмедова, преподаватель,
академический лицей Ташкентского Международного Вестминстерского университета,
М.М.Хабибуллина, преподаватель,
академический лицей Ташкентского Туринского Политехнического университета,
Узбекистан
F.A. Akhmedova, teacher,
Academic Lyceum of Tashkent International Westminster University,
M.M. Khabibullina, teacher,
Academic Lyceum of the Tashkent Turin Polytechnic University,
Uzbekistan

ПРИ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯ ОТБОР КОРНЕЙ

WHEN SOLVING TRIGONOMETRIC EQUATIONS, SELECTION OF ROOTS

***Аннотация**: В этом статье представлены наиболее сложные задания: когда необходимо не только решить тригонометрическое выражение, но и из найденных корней отобрать корни, удовлетворяющие какому-нибудь условию. Приведены необходимые теоретических сведения для отбора корней: разбиение множества целых чисел на непересекающиеся подмножества, решение уравнений в целых числах (диафантовых).*

***Ключевые слова:** геометрия, тригонометрия, уравнения, отбор корней.*

***Abstract:** This article presents the most difficult tasks: when it is necessary not only to solve a trigonometric expression, but also to select roots from the found roots that satisfy some condition. The necessary theoretical information for the*

selection of roots is given: the partition of the set of integers into disjoint subsets, the solution of equations in integers(diaphanous).

***Keywords**: geometry, trigonometry, equations, selection of roots.*

Самое важное отличие тригонометрических выражений от алгебраических состоит в том, что в алгебраических выражениях конечное число корней, а в тригонометрических - бесконечное, что сильно усложняет отбор корней. Еще одной спецификой тригонометрических выражений является неединственность формы записи ответа.

Проблема отбора корней, отсеивания лишних корней при решении тригонометрических уравнений весьма специфична и обычно оказывается более сложной, чем это имело место для уравнений алгебраических. Приведем решения уравнений, иллюстрирующие типичные случаи появления посторонних корней и методы борьбы с ними.

Пример 1. *Найти ближайший к числу* $\frac{13\pi}{4}$ *корень уравнения*

$$\sin x\cos 2x+\sin x+\frac{10}{11}\sin 2x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{30}{44}.$$

Решение.

$$\sin x\left(2\cos^2 x-1+1+\frac{20}{11}\cos x\right)=\frac{3}{4}\left(\cos x+\frac{10}{11}\right)\Leftarrow$$

$$\sin x 2\cos x\left(\cos x+\frac{10}{11}\right)-\frac{3}{4}\left(\cos x+\frac{10}{11}\right)=0\Leftarrow$$

$$\left(\cos x+\frac{10}{11}\right)\left(\sin 2x-\frac{3}{4}\right)=0\Leftarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x+\dfrac{10}{11}=0\\ \sin 2x-\dfrac{3}{4}=0\end{array}\right.\Leftarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\left(\pi-\arccos\dfrac{10}{11}\right)+2\pi k\\ 2x=\left[\begin{array}{l}\arcsin\dfrac{3}{4}+2\pi m\\ \pi-\arcsin\dfrac{3}{4}+2\pi m\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Подставляя последовательно в формулу $r=\left|x-\dfrac{13\pi}{4}\right|$ вместо переменной x выписанные выше серии решений уравнений, отыщем для каждой из них $\min r$, а затем сравним полученные минимальные r между собой.

а) $r_1=\left|x_1-\dfrac{13\pi}{4}\right|=\left|\pi-\arccos\dfrac{10}{11}+2\pi(k-1)\right|.$

Ясно, что $\min r_1$ достигается при $k=1$, то есть $\min r_1=\dfrac{\pi}{4}+\arccos\dfrac{10}{11}$.

б) $r_2=\left|x_2-\dfrac{13\pi}{4}\right|=\left|-\pi+\arccos\dfrac{10}{11}+2\pi k-3\pi-\dfrac{\pi}{4}\right|=\left|-\dfrac{\pi}{4}+\arccos\dfrac{10}{11}+2\pi(k-2)\right|$

$\min r_2=\dfrac{\pi}{4}-\arccos\dfrac{10}{11}$.

в) $r_3=\left|x_3-\dfrac{13\pi}{4}\right|=\left|\dfrac{1}{2}\arcsin 334+\pi m-3\pi-\dfrac{\pi}{4}\right|=\left|\dfrac{1}{2}\arcsin 34-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{3}{4}\right|.$

г) $r_4=\left|x_4-\dfrac{13\pi}{4}\right|=\left|\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{3}{4}+\pi m-3\pi-\dfrac{\pi}{4}\right|=\left|\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{3}{4}+\pi(m-3)\right|.$

$\min r_4=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{3}{4}$.

Выберем минимальное из чисел r_i, $i=\overline{1,4}$. Сразу ясно, что $\min r_2<\min r_1$ и что $\min r_3=\min r_4$. Отралось сравнить $\min r_2$ и $\min r_3$. Предположим, что

$$\frac{\pi}{4}\arccos\frac{10}{11}<\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}\Leftarrow\arccos\frac{10}{11}>\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}\Leftarrow$$

$$\Leftarrow 2\arccos\frac{10}{11}>\arcsin\frac{3}{4}\Leftarrow\quad(*)$$

$$2\sin\arccos\frac{10}{11}\cdot\cos\arccos\frac{10}{11}>\sin\arcsin\frac{3}{4}\Leftarrow\quad(**)$$

$$2\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{10}{11}\right)}\cdot\frac{10}{11}>\frac{3}{4}\Leftarrow 2\cdot\frac{\sqrt{21}}{11}\cdot\frac{10}{11}>\frac{3}{4}\Leftarrow$$

$$\Leftarrow 80\sqrt{21}>3\cdot|2|\Leftarrow 6400\cdot 21>9\cdot|2|^2\Leftarrow 44800>43923.$$

Последнее неравенство - верное, а все сделанные переходы - равносильные. Поэтому верно исходное неравенство. Обоснуем равносильность переходов (*) и (**) (равносильность остальных переходов следует из общих свойств числовых неравнств). В случае преобраования (*), достаточно заметить, что числа $\arccos\frac{10}{11}$ и $\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}$ расположен на участке $(0;\frac{\pi}{2})$ монотонного возрастания функции $\sin x$. В случае перехода (**) формула $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ справедлива, так как $\alpha=\arccos\frac{10}{11}\in(0;\frac{\pi}{2})$.

Ответ. $x=3\pi+\arccos\frac{10}{11}$.

Пример 2. *Найти корни уравнения:* $\sqrt{\cos 2x+\sin 3x}=\sqrt{2}\cos x$.

Решение этого уравнения распадается на два этапа: 1) решение уравнения, получающегося из данного возведением в квадрат обеих его частей; 2) отбор тех корней, которые удовлетворяют условию $\cos x>0$. При этом заботится об условии $\cos 2x+\sin 3x\le 0$ нет необходимости. Все значения k, удовлетворяющие возведенному в квадрат уравнению, этому условию удовлетворяют.

Первый шаг нас приводит к уравнению $\sin 3x=1$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k$.

Теперь надо определить, при каких k будет $\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k)\ge 0$. Для этого достаточно для k рассмотреть значения 0, 1, 2, т. е. <<обойти один раз круг>>, поскольку дальше значения косинуса начнут повторяться, получившиеся углы будут отличаться от уже рассмотренных на величину, кратную 2π.

Ответ. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

Итак, основная схема отбора корней состоит в следующем. Находится наименьший общий период всех тригонометрических функций входящих в уравнение. На этом периоде отбираются корни, а затем оставшиеся корни периодически продолжаются.

Пример 3. *Решить уравнение:* $|\cos x| = \sin x + \frac{1}{2}$.

Решение. Уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} |\cos x|^2 = \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2, \\ \sin x + \frac{1}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0, \\ \sin x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8 \cdot 3}}{8} = \frac{-1 - \pm\sqrt{7}}{4}.$$

Но $\frac{-1-\sqrt{7}}{4} < -\frac{1}{2}$ --- не годится.

Ответ. $x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{4} + \pi k$.

Раскрывая знак модуля получаем более громоздное решение. А ответ в этом случае принимает вид:

Ответ. $x = \frac{5\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi n$.

Литературы:

1. А.И.Яблонский. Электронный учебник по высшей математике. М., 1993 г.

2. Ё.Юсупов. Математика. Учебное пособие. ФФ ТУИТ, 2009 г.

3. П.Е.Данко и др. Математика в упражнениях и задачах 2-х частях. М., 2006 г.