О МОДЕЛИ БАЛАНСА МНОГООТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКИ И РЕШЕНИИ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ КАК СОВРЕМЕННЫХ ПРОБЛЕМАХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ

Якубова Умида Шухратуллаевна
Доцент, кафедры «Высшей и прикладной математики»
Ташкентский государственный экономический университет

Аннотация. В данной статье рассматривается модель баланса многоотраслевой экономики и решение транспортной задачи при помощи метода потенциалов. Задача проверяется на сбалансированность. Находится базовое возможное решение. Составляется план перевозки так, чтобы затраты на перевозку были минимальными.

Ключевые слова. *Многоотраслевая экономика, транспортная задача, метод потенциалов, затраты, потребители, поставщики.*

ON THE BALANCE MODEL OF A MULTI-SECTORAL ECONOMY AND THE SOLUTION OF THE TRANSPORT TASK AS A MODERN PROBLEM OF ECONOMIC DEVELOPMENT

Yakubova Umida Shuxratullayevna
Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics
Tashkent State University of Economics

Abstract. This article discusses the model of the balance of a diversified economy and the solution of the transportation problem using the method of

potentials. The task is checked for balance. A basic possible solution is found. A transportation plan is drawn up so that transportation costs are minimal.

Keywords. *Diversified economy, transportation problem, method of potentials, costs, consumers, suppliers.*

Основная задача модели баланса: при каком выпуске продукции n отраслевого производства полностью удовлетворится спрос? Здесь надо учитывать, что одна часть произведенной n отраслями продукции тратится на нужды самой отрасли, другая – на нужды других отраслей и еще одна часть – на не связанные с производством нужды.

Задача вычисления связи между отраслями путем производства и потребления различной продукции довольно трудная. Эту задачу в виде математической модели впервые в 1936 году выразил знаменитый американский экономист В.В.Леонтьев. Эта модель попытки анализа экономического кризиса 1929-1932 годов в Америке основана на алгебре матриц.

Рассмотрим производственную деятельность в определенный период, скажем, один год. Обозначим через x_i объем денежно выраженного валового продукта, произведенного i–й отраслью за этот период, здесь $i = 1, 2, \cdots, n$, через x_{ij}– денежный объем произведенной $i-$й отраслью продукции, потраченной на нужды $j-$й отрасли, через y_i– денежный объем произведенной $i-$й отраслью продукции, потраченной на непроизводственные нужды. Естественно, объем валового продукта i–й отрасли должен равняться сумме денежных затрат объемов продукции на нужды n отраслей и непроизводственные нужды, т.е.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$
.

Эти уравнения называются соотношениями баланса.

Введем обозначения:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i,\ j = 1,\ 2, \cdots, n)$$
,

$a_{ij} - j$ означает объем произведенной i–й отраслью продукции, затраченной на единицу объема продукции $j -$й отрасли. a_{ij} называется коэффициентом непосредственных затрат. Коэффициенты a_{ij} определяет применяемая в процессе производства в рассматриваемый период технология. Насколько новая, эффективная применяется технология, настолько меньше коэффициенты a_{ij}, настолько меньше затраты, настолько выше эффективность. В рассматриваемый период коэффициенты a_{ij} будем считать постоянными, т.е. затраты линейно зависят от валовых затрат:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad (i,\ j = 1, 2, \ldots, n)$$
.

Из-за этого соотношения рассмотренную многоотраслевую экономическую модель называют еще линейной моделью баланса. В этом случае система уравнений имеет следующий вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (1)$$
.

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------ \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
,

здесь A называется технологической матрицей, X – вектором валового продукта, Y – вектором конечного продукта. Согласно этим обозначениям, систему уравнений можно записать в следующем виде:

$$\mathrm{X} = \mathrm{AX} + \mathrm{Y}. \qquad (2)$$

Основная задача многоотраслевого баланса состоит в нахождении вектора валового продукта X по заданному вектору конечного продукта и матрице непосредственных затрат A, т.е. последнее уравнение нужно решить относительно неизвестного вектора X. Для этого приведем его к следующему виду:

$$(E - A)\mathrm{X} = \mathrm{Y}.$$

Если $det(E - A) \neq 0$, то существует обратная матрица $(E - A)^{-1}$ и решение имеет следующий вид:

$$\mathrm{X} = (E - A)^{-1}\,\mathrm{Y}.$$

Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется матрицей непосредственных затрат. Для понимания экономического значения этой матрицы рассмотрим единичные векторы конечного продукта:

$$\mathrm{Y}_i = (0, 0, \cdots, 1, \cdots 0), \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

с единицей на i– м месте, нулями на остальных местах. Соответствующие им решения уравнения равны следующим:

$$\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \ \cdots, \quad \mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Значит, элемент s_{ij} матрицы $S = (s_{ij})$ означает количество продукции отрасли i, затраченной на отрасль j, для получения конечного продукта Y'_j.

Согласно экономическому смыслу рассматриваемой задачи, в уравнении (1) $y_i \geq 0, \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \quad a_{ij} \geq 0 \quad \left(i, j = \overline{1,n}\right)$. Для решения уравнения должно быть $x_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$. Это можно записать, как

$$\mathrm{Y} \geq 0, \;\; \mathrm{A} \geq 0 \text{ и } X \geq 0.$$

Если для произвольного вектора $\mathrm{Y} \geq 0$ существует решение (2), удовлетворяющее неравенству $\mathrm{X} \geq 0$, матрица $\mathrm{A} \geq 0$ называется продуктивной матрицей. В этом случае модель Леонтьева тоже называется продуктивной моделью.

Пример. В следующей таблице даны в условных денежных единицах коэффициенты затрат и конечный продукт, намеченный в запланированный период:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт
		Промышленность	Сельское хозяйство	
Производство	Промышленность	0,3	0,25	300
	Сельское хозяйство	0,15	0,12	100

Найти:

a) Количество запланированного валового продукта отраслей, межотраслевую доставку продукции, чистую продукцию отраслей;

b) Необходимое количество производства каждой отрасли при увеличении конечного продукта сельского хозяйства на 20%, промышленности на 10%.

Решение. а) Запишем матрицу коэффициентов прямых затрат А и вектор конечного продукта Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 \\ 0{,}15 & 0{,}12 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

отсюда запишем матрицу:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1-0{,}3 & -0{,}25 \\ -0{,}15 & 1-0{,}12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}25 \\ -0{,}15 & 0{,}88 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица полных затрат:

$$S = (E-A)^{-1} = \frac{1}{0{,}5785}\begin{pmatrix} 0{,}88 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}52 & 0{,}26 \\ 0{,}43 & 1{,}21 \end{pmatrix}.$$

Определим вектор валового продукта:

$$X = \begin{pmatrix} 1{,}52 & 0{,}26 \\ 0{,}43 & 1{,}21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 482 \\ 250 \end{pmatrix}.$$

Найдем количество доставленной отраслями продукции x_{ij} по формуле:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j.$$

Например, $x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0.3 \cdot 482 = 144.6.$

Вычислив валовой продукт отраслей, межотраслевое снабжение продукцией, а также чистый продукт отраслей, составим следующую таблицу:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
		Промышленность	Сельское хозяйство		
Производство	Промышленность	144,6	62,5	300	482
	Сельское хозяйство	72,3	30	100	150

Чистая продукция	265,1	157,5		
Валовой продукт	482	250		

b) Согласно условию, вектор конечного продукта:

$$Y = \begin{pmatrix} 300 \cdot 1{,}1 \\ 100 \cdot 1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix},$$

тогда вектор продукта будет следующим:

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1{,}52 & 0{,}26 \\ 0{,}43 & 1{,}21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 532{,}8 \\ 287{,}1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, промышленное производство надо повысить до 532,8 условных денежных единиц, сельскохозяйственное – до 287,1 условных денежных единиц.

В настоящее время важно уметь решать задачу транспортировки или доставки товаров из отрасли в пункты назначения с минимально возможными затратами, удовлетворяя при этом потребности спроса и предложения [1]. Предположим, некая компания-поставщик имеет собственные производственные мощности во многих странах и поставляет продукцию всем ведущим мировым производителям [2]. Предположим, в локациях A1, A2, A3 есть три фабрики. Мощность заводов составляет 35, 50, 15 в сутки. Завод поставляет продукцию четырем клиентам B1, B2, B3 и B4, потребность которых составляет 30, 10, 20, 40 в день. Стоимость перевозки единицы продукции за один километр в условных единицах приведена в таблице ниже (Таблица 1).

Таблица 1 – Первоначальный план транспортировки

	Потребители (Bj)				Запасы
Поставщики (Ai)	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	1	3	2	4	**35**
A2	2	1	4	3	**50**

A3	3	5	6	1	**15**
Спрос	**30**	**10**	**20**	**40**	

Составим план перевозки так, чтобы цена на перевозку была самой низкой. В качестве первого шага составим стандартную транспортную задачу. Для этого нужно проверить, сбалансирована задача или нет:

Если ∑Ai=∑Bj → задача сбалансированная (закрытая).

Если ∑Ai≠∑Bj → задача несбалансированная (открытая), то необходимо добавить отсутствующего поставщика или потребителя в таблицу с ценой на транспортировку c=0.

В данном случае ∑Ai=100 ∑Bj=100 → задача сбалансирована**.**

Теперь нужно найти базовое возможное решение. Составим первоначальный план перевозки. Выберем наименьшее значение среди всех стоимостных значений (выделено красным цветом), т.е. минимальные затраты. Здесь наименьшим элементом является 1. Всего есть 3 таких элемента. Сравним спрос и предложение этой ячейки (здесь, 30 и 35). Выделим ячейку с наименьшим значением (в данном случае 30) (см. таблицу 2 ниже). Вычтем исключенную ячейку с наименьшим значением, т.е. выделенное значение ячейки. (Здесь 35–30=5). Соответственно удалим столбец или строку, вычеркнув их (в данном случае строку с источником A1).

Таблица 2 – Составление первоначального плана перевозки

	Потребители (Bj)				**Запасы**
Поставщики (Ai)	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	1 30	3	2	4	**35**
A2	2	1	4	3	**50**
A3	3	5	6	1	**15**
Спрос	**30**	**10**	**20**	**40**	

Теперь продолжим процесс с оставшимися клетками. Опять же, найдем ячейку с наименьшей стоимостью и выполним те же действия, что и приведенные выше.

Здесь составляется базовое возможное решение (более подробную информацию см. в таблице 3 ниже).

Таблица 3 - Основные возможные решения плана перевозок

	Потребители (Bj)				**Снабжение**
Поставщики (Ai)	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	1 30	3 0	2 5	4 0	**35**
A2	2 0	1 10	4 15	3 25	**50**
A3	3 0	5 0	6 0	1 15	**15**
Потребности	**30**	**10**	**20**	**40**	

Следующим шагом является проверка того, не вырождается ли план транспортировки (см. таблицу 4 ниже):

Таблица 4 - Количество основных ячеек

	Потребители (Bj)				**Снабжение**
Поставщики (Ai)	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	1 30	3 0	2 5	4 0	**35**
A2	2 0	1 10	4 15	3 25	**50**
A3	3 0	5 0	6 0	1 15	**15**
Потребности	**30**	**10**	**20**	**40**	

Количество основных ячеек = m+n-1 (m- поставщиков и n-потребителей).

3+4-1=6 основных ячеек.

Для проверки базового решения на оптимальность необходимо преобразовать исходную таблицу в следующий упрощенный формат. После этого заполнить потенциалы и свободные ячейки, используя формулы: Ui+Vj=Cij и Δij=(Ui+Vj)-Cij, где Ui - потенциалы поставщиков (вписываются в таблицу в строку Ai), Vi - потребительские потенциалы (записываются в таблице в столбец Bj).

Если все Δij≤0, то план оптимален.

Если хотя бы один Δij>0, то план не оптимальный, поэтому требуется перераспределение трафика по циклу и проверка нового плана, начиная с этапа 3 (см. таблицу 5 ниже).

Таблица 5 - Проверка базового решения на оптимальность

1 30	3 -4	2 5	4 -3	**U1=0**
2 1	1 10	4 15	3 25	**U2=2**
3 -2	5 -6	6 -4	1 15	**U3=0**
V1=1	**V2=-1**	**V3=2**	**V4=1**	

1>0, значит, план не оптимальный, поэтому переходим к циклу.

Таблица 6 - Построение цикла транспортировки

1 **− 15** 30	3 -4	2 **+ 15** 5	4 -3	**U1=0**
2 **+ 15** 1	1 10	4 15 **− 15**	3 25	**U2=2**
3 -2	5 -6	6 -4	1 15	**U3=0**
V1=1	**V2=-1**	**V3=2**	**V4=1**	

После изменений базовое решение принимает новый вид. Поэтому проверим оптимальность плана потенциальным методом (проделываем те же действия, что и приведенные выше). Окончательное базовое возможное решение приведено в таблице ниже (Таблица 7):

Таблица 7 – Окончательное базовое возможное решение

1 15	3 -3	2 20	4 -2	**U1=0**
2 15	1 10	4 -1	3 25	**U2=1**
3 -3	5 -6	6 -5	1 15	**U3=-1**
V1=1	**V2=0**	**V3=2**	**V4=2**	

Поскольку все $\Delta ij \leq 0$, план оптимален.

Стоимость транспортировки = (1*15)+(2*20)+(2*15)+(1*10)+(3*25)+(1*15)= =15+40+30+10+75+15=185 (условных единиц измерения).

Таким образом, метод потенциалов не только решает задачу транспортировки, но и помогает нам найти оптимальное решение и понять, как работает модель и что можно изменить, и в какой степени модифицировать решение, что в свою очередь помогает определить стоимость и оптимального поставщика.

Использованная литература

1. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirhojaeva, N. (2021). Using Web Technologies in Effective Teaching of Mathematics at Universities. *Bulletin of Science and Practice, 7*(1), 419-425. https://doi.org/10.33619/2414-2948/62/48

2. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2023). Some Applications of Financial Mathematics in Solving Economic Problems. *Bulletin of Science and Practice, 9*(2), 312-320. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/36