ПЕРЕНОРМАЛИЗОВАННЫЕ КООРДИНАТЫ ДЛЯ ГОМЕОМОРФИЗМОВ КРУГЛОСТИ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ РАЗЛОМА

Каршибоев Х.К.

к.ф-м.н., доцент, зав.кафедры Высшей математики СамИЭС

Аннотация: В настоящей работе, найдены соотношение между z_i и z_{i+1}, (t_j и t_{j+1}), а затем показано, что $z_{q_{n+1}}$ и t_{q_n} являются почти дробно-линейными функциями от z_0 и t_0 соответственно, где предполагается, что определяющая функция $f(x)$, удовлетворяет условиям $(c_1)-(c_4)$ и число вращения $\rho=\rho(T_f)$ иррационально.

Ключевые слова: гомеоморфизмов окружности, ренормализация, число вращения.

RENORMALIZED COORDINATES FOR CIRCLE HOMEOMORPHISMS WITH SINGLE BREAKING POINT

Karshiboev Kh.K.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics SamIES

Abstract: In the present paper, we find the relation between z_i and z_{i+1}, (t_j and t_{j+1}), then it is shown that $z_{q_{n+1}}$ and t_{q_n} are almost linear-fractional functions of z_0 and t_0, respectively, where it is assumed that the defining function $f(x)$ satisfies the conditions $(c_1)-(c_4)$ and the rotation number is $\rho=\rho(T_f)$ irrational.

Key words: circle homeomorphism, renormalization, rotation number.

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм T_f единичной окружности

$$T_f x=\{f(x)\}, \qquad x\in S^1=[0,\,1) \tag{1.1}$$

где скобка $\{\}$- обозначает дробную часть числа, а $f(x)$-определяющая функция T_f, удовлетворяет следующим условиям:

(c_1) $f(x)$-непрерывная, строго возрастающая функция на R^1;

(c_2) $f(x+1)=f(x)+1$ для любого $x \in R^1$;

(c_3) гомеоморфизм $T_f x$ в точке $x=x_b$ имеет излом, т.е. существуют конечные односторонние производные $f'(x_b \pm 0)>0$ и $f'(x_b-0) \neq f'(x_b+0)$;

(c_4) $f'(x)$-абсолютно непрерывная функция на $[x_b, x_b+1]$ и $f'' \in L_p(S^1; dl)$ при некотором $p>1$.

Число $\sigma=\sigma_f(x_b)=\dfrac{f'(x_b-0)}{f'(x_b+0)}$ называется величиной излома T_f в точке $x=x_b$. Условие (c_4) называется условием гладкости Кацнельсона и Орнстейна.

Пусть число вращения $\rho=\rho(T_f)$ иррационально и разложение ρ в непрерывную дробь имеет вид:

$$\rho=[k_1, k_2, ..., k_n, ...].$$

Положим

$$\frac{p_n}{q_n}=[k_1, k_2, ..., k_n], \quad n \geq 1.$$

Числа q_n-удовлетворяют разностному уравнению:

$$q_{n+1}=k_{n+1}q_n+q_{n-1}, \quad q_0=1, \; q_1=k_1, \quad n \geq 1.$$

Обозначим особую точку x_b через x_0 и рассмотрим ее итерации, т.е. $x_i=T_f^i x_0, \; i \geq 1$. Обозначим $\Delta_0^{(n)}=\Delta_0^{(n)}(x_0)$-замкнутый отрезок, соединяющий точки x_0 и x_{q_n}.

Обозначим через $V_n=V_n(x_0)$ замкнутый интервал, соединяющий точки x_{q_n} и $x_{q_{n+1}}$. Ясно, что $V_n=\Delta_0^{(n)} \cup \Delta_0^{(n+1)}$. Интервал V_n-называется n-ой ренормализационной окрестностью точки x_0. Определим отображение Пуанкаре по формуле:

$$\pi_n(x)=\begin{cases} T_f^{q_{n+1}}x, & если \;\; x \in \Delta_0^{(n)} \setminus \{x_0\}, \\ T_f^{q_n}x, & если \;\; x \in \Delta_0^{(n+1)}. \end{cases} \quad (1.2)$$

По общей схеме метода ренормализационной группы (РГ) нас интересует главным образом поведение отображения Пуанкаре $\pi_n(x)$, при $n\to\infty$. Поскольку длина отрезка V_n экспоненциально стремится к нулю и $q_n\to+\infty$ при $n\to\infty$, поведение $\pi_n(x)$ удобно изучить в новых перенормированных координатах.

Введем перенормированные координаты z на V_n:

$$z=\frac{x-x_0}{x_0-x_{q_n}},\quad x\in V_n \tag{1.3}$$

Обозначим $a_n=\dfrac{x_{q_{n+1}}-x_0}{x_0-x_{q_n}}$. Очевидно, что $a_n>0$. При $x\in V_n$, соответствующие координаты z принимают значения от -1 до a_n. В новых координатах отображению π_n соответствует следующая пара (f_n,g_n):

$$\begin{aligned} f_n(z)&=\frac{f^{q_{n+1}}(x_0+z(x_0-x_{q_n}))-x_0-p_{n+1}}{x_0-x_{q_n}},\\ g_n(z)&=\frac{f^{q_n}(x_0+z(x_0-x_{q_n}))-x_0-p_n}{x_0-x_{q_n}}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

Пара функции (f_n,g_n) называется n-ой ренормализацией отображения π_n. Положим $\Delta_i^{(n)}=T_f^i\Delta_0^{(n)},\ i\ge1,\ n\ge1$. Пусть для определенности n-нечетное число, тогда имеет место соотношение $x_{q_{n+1}}\prec x_0\prec x_{q_n}$.

Система отрезков $\xi_n=\{\Delta_i^{(n+1)},\ 0\le i<q_n;\ \Delta_j^{(n)},\ 0\le j<q_{n+1}\}$ образует разбиение окружности (см. [1]). При этом соседние два отрезки из ξ_n пересекаются одной лишь концевой точкой.

Введем относительные координаты $z_i,\ 0\le i\le q_{n+1}$, внутри отрезков $\Delta_i^{(n)}$ и $t_j,\ 0\le j\le q_n$, внутри отрезков $\Delta_j^{(n+1)}$ по формулам:

$$\begin{aligned} z_i&=\frac{x_i-x}{x_i-x_{i+q_n}},\qquad x\in\Delta_i^{(n)},\\ t_j&=\frac{x_{q_{n+1}+j}-x}{x_{j+q_{n+1}}-x_j},\qquad x\in\Delta_j^{(n+1)} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Лемма 1.1. *Имеют место следующие равенства*:

$$z_i = \frac{x_i - T_f^i(x_0 + z(x_0 - x_{q_n}))}{x_i - x_{i+q_n}}, \qquad z \in [-1;0]$$

$$t_j = \frac{x_{j+q_{n+1}} - T_f^j(x_0 + z(x_0 - x_{q_n}))}{x_{j+q_{n+1}} - x_j}, \qquad z \in [0;a_n] \qquad (1.6)$$

Доказательство леммы 1.1. Лемма 1.1 доказывается прямым вычислением. Если $x \in \Delta_i^{(n)}$, тогда $T_f^{-i}x \in \Delta_0^{(n)}$. Используя равенство (1.3) получаем: $T_f^{-i}x = x_0 + z(x_0 - x_{q_n})$ и $z \in [-1;0]$. Из этого

$z_i = z_i(z) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i+q_n}} = \frac{x_i - T_f^i(T_f^{-i}x)}{x_i - x_{i+q_n}} = \frac{x_i - T_f^i(x_0 + z(x_0 - x_{q_n}))}{x_i - x_{i+q_n}}$; Точно также, если

$x \in \Delta_j^{(n+1)}$, тогда $T_f^{-j}x \in \Delta_0^{(n+1)}$ и $T_f^{-j}x = x_0 + z(x_0 - x_{q_{n+1}})$, $z \in [0;a_n]$.

Учитывая это получаем

$$t_j = t_j(z) = \frac{x_{j+q_{n+1}} - x}{x_{j+q_{n+1}} - x_j} = \frac{x_{j+q_{n+1}} - T_f^j(T_f^{-j}x)}{x_{j+q_{n+1}} - x_j} = \frac{x_{j+q_{n+1}} - T_f^j(x_0 + z(x_0 - x_{q_n}))}{x_{j+q_{n+1}} - x_j}.$$

Лемма 1.1 доказана.

В настоящем параграфе, мы найдем соотношение между z_i и z_{i+1}, (t_j и t_{j+1}), а затем покажем, что $z_{q_{n+1}}$ и t_{q_n} являются почти дробно-линейными функциями от z_0 и t_0 соответственно. Ниже мы всюду предполагаем, что определяющая функция $f(x)$, удовлетворяет условиям $(c_1)-(c_4)$ и число вращения $\rho = \rho(T_f)$ иррационально.

Введем следующие обозначения:

$\alpha_i = x_{i+q_n}$, $\gamma_i = x_i$, $\beta_i = T_f^i x$, $x \in \Delta_0^{(n)}$. Ясно, что $\beta_i \in [\alpha_i, \gamma_i]$, $0 \le i < q_{n+1}$,

$$A_i = -\frac{\frac{1}{f'(\alpha_i)(\beta_i - \alpha_i)}\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f''(y)(y \ldots}{1 + \frac{\ldots}{f'(\alpha_i \ldots}}$$

,

$$B_i = \int_{\alpha_i}^{\gamma_i} \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy, \qquad m_{n+1} = \exp\left\{\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1} B_i\right\},$$

$$\psi_i = -B_i - \ln\left(\frac{1 + A_i z_i}{1 + A_i(z_i - 1)}\right), \quad \tau_{n+1}(z_0) = \sum_{i=0}^{q_{n+1}-1} \psi_i .$$

Теорема 1.1. Справедливо следующее равенство:

$$z_{q_{n+1}} = \frac{z_0 m_{n+1} \exp(\tau_{n+1}(z_0))}{1 + z_0(m_{n+1}\exp(\tau_{n+1}(z_0)) - 1)} \tag{1.7}$$

Доказательств. Теорема 1.1 доказывается прямым вычислением.

Ясно, что

$$z_i = \frac{\gamma_i - \beta_i}{\gamma_i - \alpha_i}, \qquad z_{i+1} = \frac{\gamma_{i+1} - \beta_{i+1}}{\gamma_{i+1} - \alpha_{i+1}},$$

где

$$\alpha_{i+1} = f(\alpha_i),$$

$$\beta_{i+1} = f(\beta_i) = f(\alpha_i) + f'(\alpha_i)(\beta_i - \alpha_i) + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f''(y)(\beta_i - y)dy,$$

$$\gamma_{i+1} = f(\gamma_i) = f(\alpha_i) + f'(\alpha_i)(\gamma_i - \alpha_i) + \int_{\alpha_i}^{\gamma_i} f''(y)(\gamma_i - y)dy$$

Подставляя в выражение для z_{i+1}, получаем:

Из это вытекает что

$$\frac{1 - z_{i+1}}{z_{i+1}} = \frac{1 - z_i - (z_i - 1)A_i z_i}{z_i(1 + A_i(z_i - 1))} = \frac{1 - z_i}{z_i} \cdot \frac{1 + A_i z_i}{1 + A_i(z_i - 1)} = \frac{1 - z_i}{z_i}\exp(-B_i)\cdot\exp(-\psi_i).$$

Используя это равенство получим:

$$\frac{1-z_{q_{n+1}}}{z_{q_{n+1}}}=\frac{1-z_0}{z_0}\cdot\exp\left\{-\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1}B_i\right\}\cdot\exp\left\{-\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1}\psi_i\right\}=\frac{1-z_0}{z_0}\cdot\frac{1}{m_{n+1}\exp(\tau_{n+1}(z_0))}\quad(1.8)$$

Решая уравнение (1.8) относительно $z_{q_{n+1}}$, получим доказательство теоремы 1.1.

Литература

1. Вул Е.Б., Ханин К.М. Гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома//Успехи математических наук. -1990. т.45. вып.3(273). -С.189-190.

2. Katznelson Y., Ornstein D. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle// Ergodic Theory Dynam. Systems -1989. -№ 9(4). -P .643-680.

3. Джалилов А.А., Каршибоев Х.К. Предельные теоремы для времени попаданий отображений окружности с одной точкой излома // Успехи математических наук. – Москва, 2004.- Т. 59. вып. 1(355). С. 185-186.

4. Х.К.Каршибоев. Поведение ренормализаций эргодических отображений окружности с изломом// Узб. матем. журнал. – Ташкент, 2009. -№4. -С.82-95.