О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Соатов Улугбек Абдукадирович

Джизакский политехнический институт, доцент, к.ф-м.н.

Аннотация: В данной статье рассматривается некоторые задачи геометрии, касающиеся использования метода координат в пространстве. Известно, что чертежи играют ключевую роль в решении задач методами элементарной геометрии, но выбор того или иного чертежа обычно требует изобретательности. Необходимость создания единых инструментов для решения геометрических задач, связанных с исследованием кривых различной формы, была решена созданием координатного метода, которая позволяет решать геометрические задачи с помощью средств алгебры. Оно играет важную роль, имеет вспомогательное значение для практики, а также требует очень мало изобретательности при решении задач.

Ключевые слова: точка, прямая, плоскость, расстояние, координата, вектор, векторное произведение уравнение, площадь, объём, тетраэдр, октаэдр, сфера, поверхность, треугольник, гран, радиус, центр тяжести.

ABOUT SOLVING SOME PROBLEMS USING THE METHOD OF COORDINATES IN SPACE

Soatov Ulugbek Abdukadirovich

Jizzakh Polytechnic Institute, Associate Professor, PhD.

Annotation. This article discusses some geometry problems related to the use of the coordinate method in space. It is known that drawings play a key role in solving problems using elementary geometry methods, but the choice of one or another drawing usually requires ingenuity. The need to create unified tools for solving geometric problems associated with the study of curves of various shapes was solved by the creation of the coordinate method, which allows solving geometric problems using

algebra tools. It plays an important role, is auxiliary to practice, and also requires very little ingenuity in solving problems.

Key words: point, straight line, plane, distance, coordinate, vector, vector product equation, area, volume, tetrahedron, octahedron, sphere, surface, triangle, gran, radius, center of gravity.

Введение. В элементарной геометрии изучается свойства прямолинейных фигур и окружностей. Основную роль играют построения, вычисления же, хотя практическое значение их и велико, в теории играет подчиненную роль. Выбор того или иного построения обычно требует изобретательности и это составляет главную трудность при решении задач методами элементарной геометрии. Это трудность была решена созданием координатного метода (Р. Декарт, 1637 г.) и возникновением аналитической геометрии из потребности создать единообразные средства для решения геометрических задач с тем чтобы применить их к изучению важных для практики кривых линий различной формы. В нем важную роль играют вспомогательное значение, вследствие которого решение задач требует гораздо меньше изобретательности.

Основная часть. Мы рассмотрим некоторые задачи геометрии, касающиеся использования метода координат в пространстве. В работах [3-14] изучены различные задачи, направленные укреплению способностей и знаний по математике учеников и студентов математических факультетов.

Задача 1. Составить уравнение сферы, проходящий через четыре данные точки $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1,1,1)$.

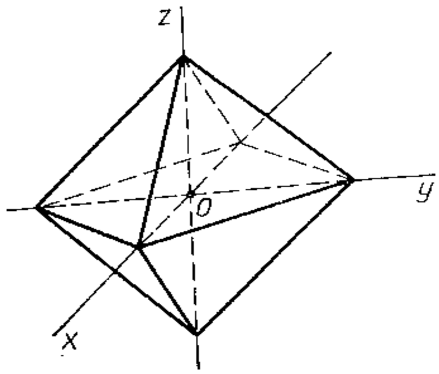
Решение. Точка $M(x;y;z)$ принадлежит сфере с центром $P(x_0;y_0;z_0)$ и радиусом r тогда и только тогда, когда $|PM|=r$, т.е.. когда

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

Этому уравнению должны удовлетворять. В частности, координаты заданных точек O, A, B, C. Подставляя эти координаты в уравнение искомой сферы, получим систему уравнений относительно $x_0;y_0;z_0$ и r:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2 \\ (x_0-1)^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2 \\ x_0^2 + (y_0-1)^2 + z_0^2 = r^2 \\ (x_0-1)^2 + (y_0-1)^2 + (z_0-z_0)^2 = r^2 \end{cases}$$

Решая полученную систему находим: $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{2}$, $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, уравнение искомой сферы имеет вид: $(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + (z-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$.



(рис.-1).

Задача 2. Составить уравнение поверхности правильного октаэдра, оси которого совпадает с осями координат

Решение. Рассмотрим сначала ту грань октаэдра, которая расположена в первом октанте. Пусть $M(x;y;z)$ - произвольная точка этой грани ABC. Соединив точку M с вершинами A, B и C и с началом координат O, разобьём тетраэдр OABC на три треугольные пирамиды: MOAC, MOBC, MOAB,

рис.-1

основаниями которых будем считать треугольники OAC, OBC и OAB. Сумма объемов этих пирамид равно объему тетраэдра OABC.

Обозначим площади каждого из этих треугольников через S, расстояние $|OA| = |OB| = |OC|$ через a. Тогда, с одной стороны, сумма объемов рассматриваемых пирамид будет $\frac{1}{3}Sx + \frac{1}{3}Sy + \frac{1}{3}Sz = \frac{1}{3}(x+y+z)$, а с другой стороны объем всего тетраэдра OABC (если принять за его основание ΔAOB, площадь которого равно S, а за высоту расстояние $|OC| = a$) будет равен $\frac{1}{3}Sa$. Приравнивая эти значения объемов, получаем, что для любой точки $M(x;y;z)$ грани ABC при $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$: $x + y + z = a$.

При составлении уравнений поверхности для других октантов, где координаты точек могут иметь и отрицательные значения, ход рассуждений остается тем же при условии использование не самых координат, а их значений. В результате получаем, что точка $M(x;y;z)$ октаэдра удовлетворяет уравнению $|x|+|y|+|z|=a$, каждое решение которого, в свою очередь, определяет точку октаэдра. Следовательно, это и есть уравнение поверхности.

Задача 3. Составить уравнение множества точек, для которых сумма квадратов расстояний от точек $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$ и $Д(0;0;1)$ равно 16. Какую фигуру определяет искомое уравнение.

Решение. Пусть $M(x;y;z)$- произвольная точка искомой фигуры, характеристическое свойство фигуры состоит по условию в том, что

$$|AM|^2+|BM|^2+|CM|^2+|ДM|^2=16.$$

Переходя к координатам получаем

$$x^2+y^2+z^2+(x-1)^2+y^2+z^2+x^2+(y-1)^2+z^2+x^2+y^2+(z-1)^2=16.$$

Отсюда, приводя подобные члены, получим

$$x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=4.$$

Чтобы выяснить геометрический смысл этого уравнения, представим его в следующей форме:

$(x-\frac{1}{4})^2+(y-\frac{1}{4})^2+(z-\frac{1}{4})^2=\frac{67}{16}$. Видим, что искомая фигура является сферой с центром в точке с координатами $(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4})$ и радиусам $\frac{1}{4}\sqrt{67}$.

Задача 4. Какой фигурой является множества точек, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A и B имеет постоянное значение C?

Решение. Выберем точку A за начало координат и примем прямую AB за ось абсцисс. Тогда точка B будет иметь координат $(b;0;0)$. Пусть теперь $M(x;y;z)$- произвольная точка искомого множества. Тогда $|MA|^2-|MB|^2=C$ или $x^2+y^2+z^2-(x-b)^2-y^2-z^2=c$. Отсюда, $x=\frac{c+b^2}{2b}$. Следовательно, искомая фигура является плоскостью, перпендикулярной прямой АВ и отстоящий от точки А на расстояние $\left|\dfrac{c+b^2}{2b}\right|$.

Задача 5. Зная вершину $A(1;1;1)$ квадрата АВСД, его центр $O(0;0;0)$ и вектор $a=(2;-1;-1)$ перпендикулярной плоскости квадрата, найти остальные его вершины.

Решение. Так, как вектор $OД$ перпендикулярен как вектору OA, так и вектору $OД$ перпендикулярен вектору $\left[OA,a\right]$ (векторное произведение векторов OA и a). Кроме того, $|OД|=|OA|$ и $\left[\left|OA,\bar{a}\right|\right]=|OA|\cdot\bar{a}$. Следовательно, $\overset{\cdot}{OД}=\dfrac{(OA,a)}{|a|}$.

Знаяя координаты вектора $OA=(1;1;1)$, определим $\left[OA,a\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(0;3;-3)$. Так как, $|a|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$, то $\overset{\cdot}{OД}=(\pm 0;\pm\sqrt{\frac{3}{2}};\mp\sqrt{\frac{3}{2}})$. Поэтому вершину Д и В квадрата соответственно имеет координаты $(0;\sqrt{\frac{3}{2}};-\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(0;-\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}})$. Так как, точка С симметричная точке А относительно начала координат $O(0;0;0)$ то $C(-1;-1;-1)$.

Задача 6. Дан тетраэдр ОАВС, A', B', C', O'-центры тяжести его граней ОВС, ОАС, ОАВ и АВС. (рис 2.). Найти, какую часть объема тетраэдра ОАВС составляет объем тетраэдра $O'A'B'C'$.

Решение. Обозначим $AB=a$, $OB=b$, $OC=c$. Тогда объем V-тетраэдра ОАВС выражается формулой $V=\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\bar{b},\vec{c})\right|$. Аналогично объем V'-тетраэдра $O'A'B'C'$ равен:

$$V' = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{O'A'}, \overline{O'B'}, \overline{O'C'}\right)\right|.$$

Так как, $\overline{O'A'} = \overline{OA'} - \overline{OO'}$, и $\overline{OA'} = \frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}$, $\overline{OO'} = \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3}$, то $\overline{O'A'} = \frac{\bar{a}}{3}$. Так же найдём, что $\overline{O'B'} = \frac{\bar{b}}{3}$, $\overline{O'C'} = \frac{\bar{c}}{3}$.

Следовательно,

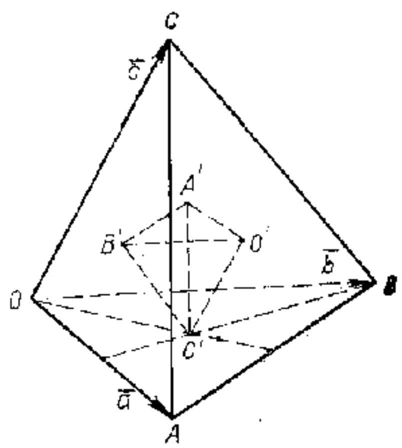
$$V' = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{27}\left|\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)\right| = \frac{1}{27}V.$$

рис.-2

Заключение. Изучение любого математического курса немыслимо без выработки навыков, решения задач приобретает особое значение для студентов, позволяя им самостоятельно контролировать ступень усвоения материала. В данной работе изучением некоторых задач геометрии, показано успешное применение метода координат в пространстве, то есть решение геометрических задач средствами алгебры. С необходимым теоритическим материалом следует ознакомится в работах [1] и [2]. В статьях [3-14] изучены многие разнообразные задачи с решениями, которые могут быть использованы в математических кружках по закреплению теоретических знаний.

Использованная литература.

1. Атанасян Л.С. Геометрия 4.1. М. Просвещение 1973.
2. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия 4.1.М. Просвещение 1974.
3. Abdukadirovich, S.U., & Abduganievich, D.U. (2022). ABOUT THE METHODS OF SOLVING PARAMETRIC EQUATIONS. *Journal of Academic Research and Trends in Educational Sciences*, *1*(5), 1-7.
4. Soatov, U. A. (2022). Tenglamalarni yechishning grafik usuli haqi-da. *Science and Education*, *3*(8), 7-12.



5. Abdukadirovich, S. U., & Abdug’oniyevich, D. U. B. (2022, November). ABOUT THE METHODS OF SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS AT THE SCHOOL LEVEL. In *E Conference Zone* (pp. 49-56).
6. Abdukadirovich, S. U., & Abduganievich, D. U. (2021, June). ON SOME PROBLEMS OF EXTREME PROPERTIES OF THE FUNCTION AND THE APPLICATION OF THE DERIVATIVE AND METHODS FOR THEIR SOLUTION. In *Archive of Conferences* (pp. 113-117).
7. Соатов, У. А., & Джанизоков, У. А. (2022). Сложные события и расчет их вероятностей. *Экономика и социум*, (1-2 (92)), 222-227.
8. Djonuzaqov, S. U. (2019). Irratsional tenglama va tengsizliklarni yechish metodlarining tatbiqlari haqida. *Scientific-methodical journal of" Physics, Mathematics and Informatics*, *4*, 8-16.