LOGARIFMIK FUNKSIYALAR, TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR

Shamuratova Mavluda Ergashboy qizi
Xorazm viloyati Gurlan tumani
1-son kasb-hunar maktabi
Matematika fani o‘qituvchisi

Annotatsiya: ushbu maqolada, logarifmik funksiyalar, tenglamalar va tengsizliklarning yechish usullari haqida ma’lumotlar berilgan.

Kalit so’zlar: logarifmik funksiyalar, tenglamalar, tengsizliklar, grafig, funksiya, oraliq musbat.

Abstract: this article provides information about logarithmic functions, methods of solving equations and inequalities.

Key words: logarithmic functions, equations, inequalities, graph, function, intermediate positive.

Logarifmik funksiya. $a > 0$, $a \neq 1$ bo‘lsin. N sonining a asos bo‘yicha ***logarifmi*** deb, N sonini hosil qilish uchun a sonini ko‘tarish kerak bo‘lgan daraja ko‘rsatkichiga aytiladi hamda $\log_a N$ bilan belgilanadi.

Ta’rifga ko‘ra, $a^x = N$ ($a > 0$, $a \neq 1$) tenglamaning x yechimi

$x = \log_a N$ sonidan iborat. Ifodaning logarifmini topish amali shu ifodani *logarifmlash*, berilgan logarifmiga ko‘ra shu ifodaning o‘zini topish esa *potensirlash* deyiladi.

$x = \log_a N$ ifoda potensirlansa, qaytadan $N = a^x$ hosil bo‘ladi. $a > 0$, $a \neq 1$ va $N > 0$ bo‘lgan holda $a^x = N$ va $\log_a N = x$ tengliklar teng kuchlidir.

Shu tariqa biz o‘zining aniqlanish sohasida uzluksiz va monoton bo‘lgan $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) funksiyaga ega bo‘lamiz. Bu funksiya:

a asosli logarifmik funksiya deyiladi. $y = \log_a x$ funksiya $y = a^x$ funksiyaga teskari funksiyadir. Uning grafigi $y = a^x$ funksiya grafigini $y = x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish bilan hosil qilinadi. Logarifmik funksiya ko‘rsatkichli funksiyaga teskari funksiya bo‘lganligi sababli, uning xossalarini ko‘rsatkichli funksiya xossalaridan foydalanib hosil qilish mumkin.

Jumladan, $f(x) = a^x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = \{-\infty< x < +\infty\}$, o‘zgarish sohasi $E(f) = \{0 < y < +\infty\}$ edi. Shunga ko‘ra $f(x) = \log_a x$ funksiya uchun $D(f) = \{0 < x < +\infty\}$, $E(f) = \{-\infty < y < +\infty\}$ bo‘ladi.

$a > 1$ da $\log_a x$ funksiya $(0; +\infty)$ nurda uzluksiz, o‘suvchi, $0 < x < 1$ da manfiy, $x > 1$ da musbat, $-\infty$ dan $+\infty$ gacha o‘sadi. Shu kabi $0 < a < 1$ da funksiya $(0; +\infty)$ da uzluksiz, $+\infty$ dan 0 gacha kamayadi, $0 < x < 1$ oraliqda musbat, $x > 1$ da manfiy qiymatlarni qabul qiladi. Ordinatalar o‘qi $\log_a x$ funksiya uchun ***vertikal asimptota.***

Quyidagi misollarni ko`rib chiqamiz:

1. $2^x=4$ ni yechish uchun $2^x=2^2$ deb yozamiz va $x=2$ yechimni topamiz.

2. $2^x=5$ bo`lsin. o`ng tomondagi 5 ni asosi 2 bo`lgan daraja ko`rinishida tasvirlash mushkul. Lekin bu tenglamaning haqiqiy ildizi mavjudligi bizga ma`lum. Bunday tenglamalarni yechish uchun logarifm tushunchasi kiritiladi.

Umuman olganda, $a^x=b$ $(a>0,\ a\neq1,\ b>0)$ tenglamaning ildizi a asosga ko`ra b sonning logarifmi deyiladi.

**Ta`rif:** $b$ sonning $a$ asosga ko`ra logarifmi deb b sonni hosil qilish uchun a sonni ko`tarish kerak bo`ladigan daraja ko`rsatkichiga aytiladi va $\log_a b$ kabi belgilanadi. $a^x=b$ tenglamani ($x=\log_a b$ bo`lgani uchun)

$$a^{\log_a b} = b \qquad (1)$$

ko`rinishida yozish mumkin. (1) formula asosiy logarifmik ayniyat deyiladi, bu yerda

$a>0$ $\qquad$ $a\neq1$ $\qquad$ va $\qquad$ $b>0$

Misollar: 1) $\log_2 16$ $\qquad$ 2) $\log_5 0{,}04$ ning qiymatini toping.

Yechish: 1) $16=2^4$ bo`lgani uchun, 16 ni hosil qilish uchun ikkini to`rtinchi darajaga ko`tarish kerak, demak $\log_2 16=4$.

2) $0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 5^{-2}$ ekanligi ma`lum. Shuning uchun $\log_5 0,04=-2$

Misollar: 3. $\log_4 x = \frac{1}{2}$, 4) $\log_x 4 = -\frac{3}{4}$ tenglamalarni qanoatlantiruv-chi x larni topamiz.

Yechish: Asosiy logarifmik ayniyatdan foydalanib:

3) $x = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

4) $x^{\log_x 4} = 4$, ya`ni $x^{-\frac{3}{4}} = 4$, $x = 4^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{256}}$ larni topamiz.

Har qanday *a>0, b>0, a≠1, b≠1, x>0, y>0* va haqiqiy istalgan *n* va *m* sonlar uchun quyidagi tengliklar bajariladi:

1) $\log_a 1 = 0,$ 2) $\log_a a = 1,$

3) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y,$

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$

5) $\log_a x^n = n \log_a x,$

6) $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x,$

7) $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x,$

8) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$

9) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a},$

Bu tengliklar ko`rsatkichli funksiya xossalaridan kelib chiqadi. Bulardan ba`zilarini isbot qilamiz.

Logarifmik ayniyatdan foydalanib:

$x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$ ni topamiz.

Bu tengliklarni hadlab ko`paytirsak yoki bo`lsak

$xy = a^{\log_a x} * a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y},$

$\frac{x}{y} = a^{\log_a x} : a^{\log_a y} = a^{\log_a x - \log_a y},$ hosil bo`ladi.

Bu tengliklardan logarifm ta`rifiga ko`ra 3) va 4) tengliklar kelib chiqadi.

$x = a^{\log_a x}$ ayniyatning ikkala tomonini n – darajaga oshirsak, $x^n = a^{n\log_a x}$ hosil bo`lib, bundan $\log_a x^n = n\log_a x$ ni topamiz.

Bir asosli logarifmdan boshqa asosli logarifmga o`tish formulasi 8) ni xususiy holda 9) ni isbotlash uchun quyidagicha amal qilamiz:

$$\log_a x = b \Rightarrow x = a^b$$

Hosil bo`lgan $x=a^b$ ifodaning ikkala tomonidan $b$ asosga ko`ra logarifm topamiz:

$$\log_b x = \log_b a^b = b\log_b a \Rightarrow b = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Chap tomonga b ning qiymatini qo`yib, 8) formulani hosil qilamiz. Agar bu formuladan $x=b$ desak, 9) formula hosil bo`ladi.

5-misol. Agar $\log_2 5 = a$ va $\log_2 3 = b$ bo`lsa, $\log_2 3000$ ni a va b orqali ifodalang?

Yechish: $\log_2 3000 = \log_2(3 \cdot 5^3 \cdot 2^3) = \log_2 3 + 3\log_2 5 + 3\log_2 2 = b + 3a + 3$

6-misol. Agar $\log_3 x = \log_3 7 + 2\log_3 5 - 3\log_3 2$ bo`lsa, x ni toping.

Yechish: $\log_3 x = \log_3 7 + \log_3 5^2 - \log_3 2^3 = \log_3 \frac{7 \cdot 5^2}{2^3} = \log_3 \frac{175}{8}$,

Bundan $x = \frac{175}{8} = 21{,}875$

O`nli va natural logarifmlar. 1-ta`rif. Asosi $a=10$ bo`lgan logarifmlar o`nli logarifmlar deyiladi va lgx orqali ifodalanadi, ya`ni $log_{10}x=lgx$

7-misol. $lg100=lg10^2=2$

$8: lg0,01=lg10^{-2}=-2$

**2-ta`rif.** Natural logarifm deb asosi $e$ son bo`lgan logarifmga aytiladi va lnx bilan belgilanadi, ya`ni $log_e x=lnx$, $e$ soni irratsional son bo`lib, $e=2,7182818284\ldots$ amalda $e\approx 2,7$ deb qabul qilish mumkin.

O`nli va natural logarifmlar orasida

$\lg x = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln x \approx 0{,}434294 \ln x$ va

$\ln x = \frac{1}{\lg e} \cdot \lg x \approx 2{,}302551 \lg x$ bog`lanish mavjud. Amalda $\lg x \approx 0{,}4 \ln x$ va $\ln x \approx 2{,}3 \lg x$ tengliklardan foydalanish mumkin.

9-misol. *ln100*, *lge*^{2} ni hisoblang.

Yechish: $\ln 100 \approx 2{,}3 \cdot \lg 100 = 2{,}3 \cdot 2 = 4{,}6.$
$\lg e^2 = 2 \lg e \approx 2 \cdot 0{,}4 \ln e = 0{,}8.$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Algebra va analiz asoslari. Akademik litseylar uchun qo‘llanma (R.X.Vafoyev, J.X.Xusanov va boshqalar). - T.: O’qituvchi, 2003-368 b.
2. Algebra va matematik analiz asoslari. I k. Akademik litseylar uchun qo’llanma (A.Abduxamidov, A.Nasimov va boshqalar). - T.: O’qituvchi, - 2007. 462 b.
3. Matematika. I, II qism. Kasb-hunar kollejlari uchun qo’llanma (A.Meliqulov va boshqalar). - T.: 2003.