НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ

INEQUALITIES FOR THE PROBABILITY OF RUIN

TASODIFIY DAYDISHLAR UCHUN TENGSIZLIKLAR

Жораева Мадинабону Зухриддин кизи – Ассистент, Андижанского института сельского хозяйства и агротехнологий

Аннотация: Вычисление в точном виде характеристик случайных процессов, связанных с моментом первого выхода из интервала, доступно только в некоторых частных ситуациях. Поэтому основное внимание в изучении этих характеристик уделяется асимптотическим подходам.

Abstract: Calculation in exact form of the characteristics of random processes associated with the moment of the first exit from the interval is available only in some special situations. Therefore, the main attention in the study of these characteristics is paid to asymptotic approaches

Annotatsiya: Intervaldan birinchi chiqish momenti bilan bog'liq tasodifiy jarayonlarning xususiyatlarini aniq ko'rinishda hisoblash faqat ba'zi maxsus holatlarda mavjud. Shuning uchun bu xususiyatlarni o'rganishda asosiy e'tibor asimptotik yondashuvlarga qaratiladi.

Ключевые слова: случайный процесс, вероятности разорения, случайного блуждания.

Keywords: random process, probabilities of ruin, random walk.

Kalit so'zlar: tasodifiy jarayon, yutqazish ehtimoli, tasodifiy daydish.

Пусть $\xi(t),\ t\geq 0,\ \xi(0)=0,$ - однородный случайный процесс с независимыми приращениями, выборочные функции которого непрерывны справа. В этом случае $Eexp\{\lambda\xi(t)\}=exp\{t\psi(\lambda)\},$

$$\psi(\lambda)=\gamma\lambda+\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\lambda x}-1-\frac{\lambda x}{1+x^2}\right)dS(x), \tag{1}$$

где γ и $\sigma > 0$-вещественные числа, функция $S(x)$ не убывает на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$,

$$\int_{|x|\leq 1} x^2 dS(x) < \infty, \; S(-\infty) = S(\infty) = 0.$$

Для произвольных $a > 0, \; b > 0$ введём случайную величину T, равную моменту первого выхода процесса $\xi(t)$ из интервала $(-a, b)$:

$$T = T(a, b) = inf\{t \geq 0 : \xi(t) \notin (-a, b)\}.$$

Полагаем $T = \infty$, если $\xi(t) \in (-a, b)$ для всех t . Известно, что случайная величина T конечна с вероятностью единица, если распределение случайной величины $\xi(1)$ не является вырожденным в нуле, и $ET^k < \infty$ при всех $k > 0$. Вероятности $P(\xi(T) \geq b), P(\xi(T) \leq -a)$ обычно называются вероятностями разорения.

К изучению характеристик случайных процессов, связанных с моментом первого выхода из интервала, приводят известные задачи о разорении, теории хранения запасами, теории систем массового обслуживания и ряд других.

Вычисление в точном виде характеристик случайных процессов, связанных с моментом первого выхода из интервала, доступно только в некоторых частных ситуациях. Поэтому основное внимание в изучении этих характеристик уделяется асимптотическим подходам.

Наряду с асимптотическими формулами актуальной является задача получения двухсторонних оценок для характеристик, связанных с моментом первого выхода случайного процесса из интервала. В работах [1], [2] для случайного блуждания, порождённого суммами независимых одинаково распределённых случайных величин при различных ограничениях на распределение скачка получены двусторонние оценки для вероятности разорения. Там отмечено, что любые асимптотические результаты неизбежно содержат остаточные члены. А оценка реальной величины этих остаток требует дополнительных рассмотрений. Поэтому нахождение двусторонних неравенств для характеристик граничных функционалов является естественным дополнением к имеющимся асимптотическим результатам. Оценки для вероятности $P\left(\xi(T)\geq b\right)$ при $E\xi(1)<0$ получены в $[3]$. Обычно те или иные характеристики задач с двумя границами выражаются через распределения функционалов от траекторий случайных процессов, возникающих в задачах с одной границей. Здесь верхние и нижние оценки для вероятности разорения, т.е. двусторонние оценки для вероятности $P\left(\xi(T)\geq b\right)$ (значит и для

$$P\left(\xi(T)\leq -a\right)=1-P\left(\xi(T)\geq b\right))$$

в случае $E\xi(1)=0$, выражаются только через характеристики исходного процесса $\xi(t)$, не прибегая к использованию характеристик однограничных функционалов.

Обозначим

$$\alpha(a,b)=P\left(\xi(T)\leq -a\right),\ \beta(a,b)=P\left(\xi(T)\geq b\right),$$

$$l=\frac{8}{3}\frac{a_4}{a_2},$$

$$a_z=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^z\,dS(x),$$

где $S(x)$-спектральная функция процесса $\xi(t)$ из (1) ,

$$l_1 = \frac{l\sqrt{l^2 + 4a(a+b)} - l^2}{2(a+b)^2},$$

$$l_2 = \frac{l\sqrt{l^2 + 4b(a+b)} - l^2}{2(a+b)^2}. \qquad (2)$$

Теорема. *Пусть* $E\xi(1) = 0,\ E\xi^4(1) < \infty$. *Тогда имеет место неравенства*

$$\frac{a}{a+b} - l_1 \le \beta(a, b) \le \frac{a}{a+b} + l_2,$$
$$\frac{b}{a+b} - l_2 \le \alpha(a, b) \le \frac{b}{a+b} + l_1,$$

где l_1, l_2 *определены в* (2).

Список литературы

1. V.I.Lotov, *Bounds for the probability to leave the interval,* Statistics and Probability Letters, 145 (3019), 141 – 146.

2. V.I.Lotov, *On some inequalities in boundary crossing problems for random walks,* Siberian Electronic Matematical Reports, 17 (2020), 661 – 671.

3. В.И.Лотов, В.Р.Ходжибаев, *Неравенства в задаче с двумя границами для случайных процессов,* Сибирский математический журнал, 2021 г., Том 62, № 3, стр. 563-571.

4. A.A.Mogul'skii, *On the distribution of the first jump for a process with independent increments,* Theory Brobab. Appl., 21(1977), 470 – 481.