MARKAZIY LIMIT TEOREMA VA UNING TADBIQLARI

Ismatov Utkir Rustamovich
Samarqand iqtisodiyot va servis istituti
“Oliy matematika” kafedrasi o‘qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu maqolada ehtimollar nazariyasining asosiy teoremalaridan bo‘lgan markaziy limit teoremasi haqida bo‘lib, bu teoremaning qishloq xo‘jalik masalalariga tadbiqi keltirilgan.

Kalit so‘zlar: Tasodifiy miqdor, normal taqsimot, matematik kutilish, dispersiya, o‘rtacha kvadratik chetlanish, markaziy limit teorema.

Ismatov Utkir Rustamovich
teacher of the department of “Higher Mathematics”
Samarkand institute of economics and services

Abstract: This article is about the central limit theorem, which is one of the main theorems of probability theory, and the application of this theorem to agricultural problems is presented.

Key words: Random quantity, normal distribution, mathematical expectation, variance, mean square deviation, central limit theorem.

Bizga $X_1,\ X_2,\ \ldots, X_n$ o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin. Shu tasodifiy miqdorlarni $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ yig‘indisini qaraymiz.

$X_1,\ X_2,\ \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi chekli

$$M(X_k) = a_k \quad D(X_k) = \sigma_k^2 \quad (k = 1,2,\ldots)$$

matematik kutilish va dispersiyalarga ega bo‘lsin.

$$MS_n = MX_1 + MX_2 + \ldots + MX_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A_n^k,$$

$$DS_n = DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_n = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2 = B_n^2.$$

Qanday shartda quyidagi yig‘indi

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - a_k) = \frac{S_n - A_n}{B_n}$$

normal taqsimotga yaqinlashadi?

Lyapunov teoremasi. Agar o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan $X_1,\ X_2,\ \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun shunday $\sigma > 0$ musbat son mavjud bo‘lib, $n \to \infty$ da quyidagi shart bajarilsa

$$\frac{1}{B_n^{2+\sigma}}\sum_{k=1}^{n}|X_k - a_k|^3 \to 0$$

u holda barcha *x* uchun markaziy limit teorema o‘rinli bo‘ladi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{B_n}(S_n - A_n) < x\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t}{2}}dt = \Phi_{0,1}(x).$$

Xususan agar $X_1,\ X_2,\ \ldots, X_n$ o‘zaro bog;liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bir xil taqsimotga ega bo‘lsa chekli dispersiyaga ega bo‘lgan

$$M(X_k) = a_k,\ D(X_k) = \sigma_k^2,\ MS_n = na,\ DS_n = n\sigma^2$$

bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o‘rinli bo‘ladi.

Ehtimollar nazariyasi tadqiqotlaridan ma’lumki, bir-biridan kata farq qilmaydigan tasodifiy miqdorlar yig‘indisi yanada umumiy shartda ham normal taqsimotga ega bo‘ladi.

Ma’lumki, qishloq xo‘jalik ekinlari yetarli kata maydonlarda ekilib, ular qariyb bir xil sharoitda yetishtiriladi, ya’ni qalinliklari birxil, agrotexnik ishlovlar, parvarish qilish bir xil vaqtda amalga oshiriladi. Shu sababli, o‘rganilayotgan belgini masalan, bir xil sharoitda yetishtirilgan g‘o‘zalarning uzunliklari, shoxlari soni, ko‘saklar soni, ochilgan chanoqlar soni va boshqalarni ehtimollar nazariyasining markaziy limit teoremasiga asosan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb qarashimiz mumkin.

1-misol. Norma bo'yicha 1 gektar yerga 45 kg tuksiz chigit ekilishi kerak. Aslida 1 gektar yerga ketadigan chigit miqdori tasodifiy miqdor bo'lib, uni o'rtacha kvadratik chetlanishi 5 kg bo'lsa, xo'jalikni 100 gektar yeriga 97% li kafolat bilan ketadigan chigit miqdorini toping.

Yechish: X_i tasodifiy miqdor bilan i gektar yerga ketadigan chigit miqdorini belgilaymiz. Masala shartiga ko'ra seyalka (ekkich) har bir gektar yerga 45 kgdan chigit tashlashi lozim, ya'ni ular barcha maydon uchun bir xil taqsimlangan.

$$M(X_i)=45 \text{ kg}, \quad \sigma=\sqrt{D(X)}=5 \text{ kg} \quad (i=\overline{1,100})$$

Agar X bilan 1 gektar yerga ketadigan chigit miqdorini belgilasak,

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_{100}=\sum_{i=1}^{100} X_i \quad \text{bo'ladi.}$$

Bu yerda $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ o'zaro bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlarlardir. Ehtimollar nazariyasining markaziy limit teoremasi shartlari bajariladi, demak X taqriban normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb qaralishi mumkin, uni

$$M(X)=\sum_{i=1}^{100} M(X_i)=100\cdot 45=4500\ kg=4{,}5\ t.$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{100} D(X_i)=100\cdot 5^2=100\cdot 25=2500$$

o'rtacha kvadratik chetlanishi

$$\sigma=50\ kg=0{,}05\ t.$$

β bilan 100 gektar yerning kamida 97 foiziga yetadigan chigit miqdorini belgilaymiz. Masala shartiga asosan $P(X<\beta)=0{,}97$ $n=100$ yetarli kata bo'lganligidan X - tasodifiy miqdorni $N(4{,}5;\ 0{,}05)$ parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb hisoblaymiz. Normal taqsimlangan X -

$N(a;\ \sigma)$ miqdorni $(\alpha;\beta)$ oraliqda yotuvchi qiymat qabul qilish ehtimoli formulasidan

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

foydalanamiz:

$$P(-\infty < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - 4{,}5}{0{,}05}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{\beta - 4{,}5}{0{,}05}\right) + \Phi(\infty) = 0{,}97$$

bo‘lganligidan

$$\Phi\left(\frac{\beta - 4{,}5}{0{,}05}\right) + \Phi(\infty) = 0{,}97$$

Bu yerda $\Phi(x)$ qiymatlari jadvallashtirilgan Laplas funksiyasi,

$$\Phi(+\infty) = 0{,}5; \qquad \Phi\left(\frac{\beta - 4{,}5}{0{,}05}\right) = 0{,}47.$$

Normal taqsimot funksiya jadvalidan foydalanib, $\Phi(1{,}88) = 0{,}47$ bo‘lganligidan $\frac{\beta - 4{,}5}{0{,}05} = 1{,}88$ bo‘ladi.

$$\beta = 4{,}5 + 0{,}05 \cdot 1{,}88 = 4{,}594\ t = 4594\ kg.$$

Demak, 100 gektar maydonni kamida 97 foiziga, ya’ni kamida 97 gektar yerga yetadigan chigit miqdori 4594 kg ekan.

Tukli yoki tuksiz chigitni 1gektar maydonga ekish normasi ma’lum bo‘lganda: $\frac{\beta - MS_n}{\sqrt{DS_n}} = 1{,}88$ (97% li kafolat bilan).

$\beta = MS_n + 1{,}88 \cdot \sqrt{DS_n} = na + 1{,}88\sqrt{n\sigma}$ formulalardan foydalanib, xo‘jalikka ekish uchun avvaldan qancha miqdorda chigit urug‘ini buyurtma berish mumkinligini aniqlash mumkin. Bu yerda

$$MS_n = A_n = na, \qquad DS_n = n\sigma = B_n,$$

n-jami paxta ekiladigan yer maydoni, *a=1* gektar yerga norma bo‘yicha ekiladigan chigit miqdori (kg), σ – o‘rtacha kvadratik chetlanishi.

Foydalanilgan asosiy adabiyotlar

1. Sytsaeter Kn., Hammond P., Strom A. Essential Mathematics for Economic Analysis. Pearson Education Limited. London, New York 2014. 745p.
2. Ismatov U.R. (2023). NORMAL TAQSIMOT VA UNING TADBIQLARI. Innovative Development in Educational Activities, 2(7), 371-375.
3. Ruzmetov K.Sh., Djumabayev G‘.X. Matematika. Darslik. Toshkent-2020.