Боймирзаев.Ф.Р. *преподаватель, международного института пищевых технологий и инженерии, г. Фергана, Республика Узбекистан.*

Boymirzayev.*F.R. Lecturer, International Institute of Food Technologies and Engineering, Fergana, Republic of Uzbekistan.*

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ ДРОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

SOLUTION OF ABELIAN INTEGRAL EQUATIONS USING FRACTIONAL OPERATORS.

Аннотация: В данной работе операторы дробного порядка и интегральные уравнения Абеля используются при решении сложных моделей, уравнений моделирования материалов и движения. Используя интегральное уравнение Абеля, свойства дробных операторов, решение задачи представлено с помощью дробных интегралов и дробных производных.

Ключевые слова: Дробные операторы, дробная производная, дробный интеграл.

Abstract: In this work, fractional order operators and Abel's integral equations are used in solving complex models, materials and motion modeling equations. Using the Abel integral equation, the properties of fractional operators, the solution of the problem is presented with the help of fractional integrals and fractional derivatives.

Key words: Fractional operators, fractional derivative, fractional integral.

Этот

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\alpha}^{x}\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=f(x), \qquad 0<\alpha<1 \tag{1}$$

интегральное уравнение в виде называется интегральным уравнением Абеля [1].

Уравнение (1) решается следующим образом. В этом уравнении мы смешиваем *x* с *t* и *t* с *s*, затем умножаем обе части уравнения на выражение $(x-t)^{-\alpha}$ и интегрируем от а до *x* по *t*:

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} \int_a^t \frac{\varphi(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Заменив порядок интегрирования по формуле Дирихле,

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} \tag{2}$$

мы составляем уравнение. Подставив $t = s + \tau(x-s)$ во внутренний интеграл в левой части уравнения, получим

$$\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}\,dt = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}\,d\tau = B(\alpha,1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

следует равенство. Тогда согласно (2).

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}. \tag{3}$$

Дифференцируя обе части этого уравнения, формируем решение интегрального уравнения Абеля[1]:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}. \tag{4}$$

Таким образом, если решение уравнения (1) существует, оно выражается в виде (4). Из процесса формулировки следует, что если решение существует, то оно единственно.

Таким образом, можно показать, что это

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \qquad 0<\alpha<1 \tag{5}$$

решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}} \tag{6}$$

определяется по формуле.

Как известно из курса математического анализа, для n-кратного интеграла подходит следующая формула:

$$\int_a^{x_0} dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \ldots \int_a^{x_{n-1}} \varphi(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^{x_0} (x_0-t)^{n-1}\varphi(t)dt, \quad n\in N. \tag{7}$$

$(n-1)! = \Gamma(n)$ с учетом этого правую часть уравнения (7) можно определить даже для дробных значений *n* [2].

(7) определяем интегралы дробного порядка, соответствующие равенству, в следующем порядке.

Описание. $\varphi(x)\in L_1(a,b) \quad (a<b<+\infty)$ будь как будет Этот

$$D_{xb}^{-\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}\varphi(t)dt, \quad \alpha>0 \tag{8}$$

выражения в $\varphi(x)$ форме называются интегралами α (дробного) порядка (в смысле Римана-Лиувилля) от функции.

Функции $D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x)$ и $D_{xb}^{-\alpha}\varphi(x)$ определены почти во всех точках интервала (a,b) и принадлежат классу $L_1(a,b)$.

На основе этого определения интегральные уравнения Абеля (1) и (5)

$$D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x)=f(x), \qquad D_{xb}^{-\alpha}\varphi(x)=f(x) \tag{9}$$

можно записать в форме.

Если $0<\alpha_1,\ \alpha_2<+\infty$ почти для всех $x\in(a,b)$.

$$D_{ax}^{-\alpha_2}D_{ax}^{-\alpha_1}f(x)=D_{ax}^{-\alpha_1}D_{ax}^{-\alpha_2}f(x)=D_{ax}^{-(\alpha_1+\alpha_2)}f(x) \tag{10}$$

равенство будет уместным. Действительно,

$$D_{ax}^{-\alpha_2}D_{ax}^{-\alpha_1}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}D_{ax}^{-\alpha_2}\int_a^x (x-s)^{\alpha_1-1}f(s)ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_a^x\left[\int_a^t (t-s)^{\alpha_1-1}f(s)ds\right](x-t)^{\alpha_2-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_a^x f(s)ds\int_t^x (x-t)^{\alpha_2-1}(t-s)^{\alpha_1-1}dt.$$

В результате подстановки в последний внутренний интеграл $t=s+(x-s)\tau$ получим следующее уравнение[1]:

$$\int_t^x (x-t)^{\alpha_2-1}(t-s)^{\alpha_1-1}ds=(x-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\int_0^1 \tau^{\alpha_1-1}(1-\tau)^{\alpha_2-1}d\tau=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}(x-s)^{\alpha_1-\alpha_2-1}$$

Это показывает, что уравнение (10) верно.

По определению,

$$D_{ax}^{0}f(x)=f(x) \tag{11}$$

мы так думаем.

Описание. Пусть функция $\varphi(x)$ определена в разделе $[a,b]$.

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1, \tag{12}$$

$$D_{xb}^{\alpha}\varphi(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b\frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1 \tag{13}$$

выражения в виде называются производными α (десятичного) порядка (в смысле Лиувилля) от $\varphi(x)$ функции.

На основе этого определения уравнения (4) и (6), дающие решения интегральных уравнений Абеля (1) и (5) соответственно

$$\varphi(x)=D_{ax}^{\alpha}f(x), \qquad \varphi(x)=D_{xb}^{\alpha}f(x) \tag{14}$$

можно записать в форме.

Напомним, что интегралы дробного порядка $\alpha>0$ определяются в соответствии с порядком. Но (12), (13) дробные производные определены только тогда, когда они равны $0<\alpha<1$. Прежде чем перейти к определению производных дробного порядка при $\alpha \ge 1$, приведем достаточное условие существования производных дробного порядка.

Лемма. Если функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна на участке $[a,b]$, то почти во всех точках участка $[a,b]$ имеются дробные производные функции $\varphi(x)$ и подходят следующие формулы:

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\varphi(a)}{(x-a)^{\alpha}}+\int_a^x\frac{\varphi'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}\right],\quad 0<\alpha<1,$$

$$D_{xb}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\varphi(b)}{(b-x)^{\alpha}}+\int_x^b\frac{\varphi'(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}\right],\quad 0<\alpha<1.$$

Пример. $\varphi(x)=(x-a)^{\alpha-1}$ быть. Тогда, исходя из равенства (1.1.13),

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x(x-t)^{-\alpha}(t-a)^{\alpha-1}dt.$$

Если заменить интегральную переменную $t=a+(x-a)z$ формулой,

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha}dz=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}B(\alpha,1-\alpha)=0$$

следует равенство. Итак, функция $\varphi(x)=(x-a)^{\alpha-1}$ выступает в качестве постоянного числа для производной второго порядка $\alpha\in(0,1)$.

Теперь $\alpha\ge 1$, пусть $[\alpha]$ - его целая часть, а $\{\alpha\}$ -дробная часть. Если α - целое число, мы получаем простые производные в классе α порядковых производных:

$$D_{ax}^{\alpha}=\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha},\qquad D_{xb}^{\alpha}=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha},\qquad \alpha=1,2,3,\dots\ .$$

Если α - не целое число, мы определяем упорядоченные производные следующим образом:

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}D_{ax}^{\{\alpha\}}\varphi(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]-1}D_{ax}^{\{\alpha\}-1}\varphi(x),$$

$$D_{xb}^{\alpha}\varphi(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}D_{xb}^{\{\alpha\}}\varphi(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]-1}D_{xb}^{\{\alpha\}-1}\varphi(x).$$

Итак, в общем, когда $\alpha\geq 1$.

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}D_{ax}^{\alpha-n}\varphi(x),\qquad n=[\alpha]+1, \tag{15}$$

$$D_{xb}^{\alpha}\varphi(x)=(-1)^{n}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}D_{xb}^{\alpha-n}\varphi(x),\qquad n=[\alpha]+1. \tag{16}$$

Обычно класс функций, выражаемых в виде дробных интегралов $\alpha\ (\alpha>0)$, определяется формулой $D_{ax}^{-\alpha}(L_p)$, т.е.

$$D_{ax}^{-\alpha}(L_p)=\left\{f(x): f(x)=D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x),\quad \varphi(x)\in L_p(a,b),\ \ 1\leq p<\infty\right\}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. $\alpha>0$ быть. В таком случае

$$D_{ax}^{\alpha}D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x)=\varphi(x),\qquad D_{xb}^{\alpha}D_{xb}^{-\alpha}\varphi(x)=\varphi(x) \tag{17}$$

равенства для всех $\varphi(x)\in L_1(a,b)$ функций,

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha} \varphi(x) = \varphi(x), \qquad D_{xb}^{-\alpha} D_{xb}^{\alpha} \varphi(x) = \varphi(x) \tag{18}$$

и все равенства соответственно

$$\varphi(x) \in D_{ax}^{-\alpha}(L_1), \qquad \varphi(x) \in D_{xb}^{-\alpha}(L_1)$$

выполняется для функций.

Если $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ вместо последних условий, то уравнения (18) будут в общем случае неверными и, например, первое будет заменено следующей формулой $[3]$.

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha} \varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \varphi_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a),$$

здесь $n = [\alpha] + 1, \quad \varphi_{n-\alpha}(x) = D_{ax}^{\alpha-n} \varphi(x).$

Итак, интегральные уравнения Абеля и их решения определяются уравнениями (9) и (14), и чтобы поставить функции в уравнения (14) и (9), необходимо выполнить условие приведенной выше теоремы.

Список использованной литературы

1. A. Q. O‘rinov. Maxsus funksiyalar va maxsus operatorlar. Farg‘ona: “Farg‘ona” nashriyoti, 2012, -112 bet.
2. Salohiddinov M. S. Integral tenglamalar. -Toshkent, 2007. -256 bet.
3. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. - М.: Физматлит, 2003. -272 с.
4. Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. Vol. 8, № 29. P. 71-79.

5. Псху А. В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина. Дифференциальные уравнения, 2003. 39(10), pp.1430-1433.

6. Boymirzayev F. R. PARALLEL TIP O ‘ZGARISH CHIZIG ‘IGA EGA PARABOLIK-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN INTEGRAL ULASH SHARTLI CHEGARAVIY MASALA //O'ZBEKISTONDA FANLARARO INNOVATSIYALAR VA ILMIY TADQIQOTLAR JURNALI. – 2023. – Т. 2. – №. 19. – С. 715-727.

7. Oxunjon o‘g‘li A. B., Shuhratjon o‘g‘li A. S. MIKROMODULLI SOVUTGICHLARNING ZAMONAVIY DUNYODA INQILOB QILUVCHI SOVUTISH YECHIMLARI //Science Promotion. – 2023. – Т. 1. – №. 1. – С. 101-103.

8. Raxmatjon o‘g‘li B. F. O ‘ZGARISH CHIZIG ‘IGA EGA PARABOLIK-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN INTEGRAL ULASH SHARTLI CHEGARAVIY MASALA //IQRO INDEXING. – 2024. – Т. 8. – №. 1.

9. Авазбек Ўғли, Н. Х. (2023). Мультисервисли Тармоқни Тезкор Бошқариш Усуллари. Ўзбекистонда Фанлараро Инновациялар Ва Илмий Тадқиқотлар Журнали, 2(17), 611-615.

10. Raxmatjon o‘g‘li B. F. ARALASH TENGLAMA UCHUN INTEGRAL ULASH SHARTLI CHEGARAVIY MASALA //ISSN 2181-4120 VOLUME 1, ISSUE 32 NOVEMBER 2023. – 2023. – С. 123.

11. Baxtiyor o‘g‘li K. M. TIPI BUZILADIGAN GIPERBOLA-PARABOLIK TENGLAMA UCHUN TO ‘G ‘RI VA TESKARI MASALANING KORREKLIGI HAQIDA: VI Romanovskiy nomidagi Matematika instituti

Fizika-matematika fanlari doktori SZ Djamalov taqrizi ostida //IQRO INDEXING. – 2024. – T. 8. – №. 2 (2). – С. 216-224.

12. Raxmatjon o‘g‘li B. F. KASR TARTIBLI OPERATORLAR BOSHLANG ‘ICH TUSHUNCHALAR VA ABEL INTEGRAL TENGLAMASI YECHIMLARI: Farg ‘ona Davlat Universiteti “Matematika” kafedrasi, PhD, dotsent, Xonqulov Ulug ‘bek Xursanalievich taqrizi ostida //IQRO INDEXING. – 2024. – T. 9. – №. 1. – С. 289-295.

13. Назаров Х., Исомиддинов И. Рақамли Иқтисодиётга Ўтиш Жараёнидаги Муаммолар Ва Ечимлар //Nashrlar. – 2023. – С. 366-369.