

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ КОЛЕБАНИЯ
ПРОСТРАНСТВЕННО-НАГРУЖЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ
С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЕ**

Исмоилов Шохимардон Мухаммаджонович
Наманганский инженерно строительный институт

Абдужалилов Содикжон Мухаммадамин ўгли
Наманганский инженерно строительный институт

Тошбаев Джалолиддин Камолдинович
Учитель информатики школы №20 Наманганского района

Мажидов Анвархон Махмуд ўгли
Студент Наманганский инженерно строительный институт

Аннотация. В статье рассматриваются математическое обеспечение напряженно-деформированного состояния стержней при пространственном нагружении с учетом температуры. Разработана математическая модель напряженно-деформированного состояния стержней при пространственном нагружении с учетом температуры на основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского. Выведены уравнения процессов колебания стержней соответствующими естественными начальными и граничными условиями. На основе центральные конечно-разностные соотношения метода прогонка с точностью до второго порядка разработан вычислительный алгоритм расчета статики и динамики колебания стержней с учетом температуре. Результаты приведены в виде графиков.

Ключевые слова: колебания, стержень, математическая модель, поперечный изгиб, перемещение, температурные напряжение

Annotation. The article deals with the mathematical support of the stress-strain state of rods under spatial loading, taking into account temperature. A mathematical model of the stress-strain state of rods under spatial loading, taking into account temperature, is developed on the basis of the variational principle of Hamilton - Ostrogradsky. Equations are derived for the processes of vibration of rods with the corresponding natural initial and boundary conditions. On the basis of the central finite-difference relations of the sweep method with an accuracy up to the second order, a computational algorithm for calculating the statics and dynamics of the

oscillations of the rods is developed, taking into account the temperature. The results are presented in the form of graphs.

Keywords: vibrations, rod, mathematical model, transverse bending, displacement, thermal stress

Введение. В настоящее время существуют различные методы построения и анализа математических моделей различных задач физико-математических систем (механики, физики, экономики, экологии, социологии и др.) на основе использования фундаментальных законов природы, вариационных принципов, иерархических цепочек и метода аналогии.

Получение моделей из фундаментальных законов природы, таких как законы сохранения вещества, сохранения энергии, сохранения числа частиц, а также их совместное применение описано в фундаментальных монографиях А.А. Самарского, О.М. Белоцерковского, А.А. Дородницына, В.П. Коробейникова, Р.П. Федоренко, В.К. Кабулова, А.А. Ильюшина и др.

Известно, что многие из встречающихся на практике процессов представляются в виде трехмерных и нелинейных задач. Решение таких задач является достаточно сложным, поэтому их приводятся к двумерным и одномерным задачам. Как отметил академик, ф.-м.ф.д. В.К. Кабулов [1], различные механические процессы в объектах сводятся к двумерным и одномерным задачам на основе обобщенного принципа вариации Гамильтона Остроградского и выражаются в виде математической модели [6-8].

В данной работе приводится вывод квазитрехмерных нелинейных математических моделей процессов колебания пространственно-нагруженных стержней с учетом температуры на базе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского.

Постановка задачи пространственно-нагруженных стержней с учетом температуры. В общей теории колебания упругих и упруго-пластических тел перемещения u_1 , u_2 и u_3 являются функцией четырех переменных – координат x_1 , x_2 и x_3 и времени t . При такой постановке из принципа Гамильтона-

Остроградского непосредственно выводятся уравнения Коши и граничные условия.

Для вывода этих соотношений в общем виде выпишем вариационный принцип Гамильтона-Остроградского:

$$\delta \int_t (K - \Pi^T + A) dt = 0, \quad (1)$$

где K , Π - кинетическая и потенциальная энергии, A - работа внешних объемных и поверхностных сил.

Перемещения точек стержня при совместных продольных, поперечных и крутильных колебаниях представляем в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, t) - z\alpha_1(x, t) - y\alpha_2(x, t), \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, t) + z\theta(x, t), \quad u_3(x, y, z, t) = w(x, t) - y\theta(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где u_1, u_2, u_3 - компоненты вектора перемещений; u, v, w - перемещения срединной линии стержня; α_1, α_2 - углы поворота сечений при чистом изгибе; θ - угол закручивания; x, y, z - пространственные переменные.

При вычислении вариации кинетической энергии используем соотношение:

$$K = \frac{1}{2} \rho \int_V \delta \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} u_i \right] dV \quad (3)$$

где ρ - удельная плотность массы материала тела полагается постоянной.

Вывод вариации потенциальной энергии пространственно-нагруженных стержней с учетом температуры. Для компонентов напряжений и деформаций в системе координат x_1, x_2, x_3 введем обозначения тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$ и тензора деформации $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$. Тогда для вариации потенциальной энергии имеем:

$$\delta \Pi = \iint_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^T \delta \varepsilon_{ij} dV dt. \quad (4)$$

Компоненты тензора деформации будут равны [3- 4]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (5)$$

Уравнения трехмерной связи, учитывающие температуру напряженно-деформированного состояния стержней, задаются в виде [5]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} - \alpha T &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})), \quad \varepsilon_{22} - \alpha T = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})), \\ \varepsilon_{33} - \alpha T &= \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})), \quad \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G}, \quad \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G}, \quad \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G}. \end{aligned} \quad (6)$$

где α - линейная расширение коэффициента, T - температура, E - модуль упругости, G - модуль сдвига.

Напряжения с учетом температуре вычисляются по формуле в виде:

$$\sigma_{11}^T = \sigma_{11} + E\alpha T, \quad (7)$$

где σ_{11}^T - напряжения с учетом температуре.

Вычисляем вариации работы внешних сил:

$$\int_t \delta A dt = \int_V \sum_{i=1}^3 F_i \delta u_i dV + \int_s \sum_{i=1}^3 q_i \delta u_i ds + \int_{s_1} \sum_{i=1}^3 f_i \delta u_i ds_1 \quad (8)$$

где F_i - составляющие объемных сил, отнесенные к единице объема, через q_i - поверхностные силы, отнесенные к единице площади поверхности стержня; f_i - соответственно торцовые силы.

Полученные результаты вариации кинетической (3) и потенциальной (4) энергий, а также работы внешних сил (8) подставляем в вариационный принцип Остроградского-Гамильтона (1).

Система уравнений движения стержня с учетом температуры при пространственных нагружениях:

$$\begin{aligned} &\left[-\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho S_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_z}{\partial x} + \frac{\partial R_5}{\partial x} + (\bar{F}_3 + \bar{q}_3) \right] \delta w = 0, \\ &\left[\rho S_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \rho I_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} - \frac{\partial M_y^T}{\partial x} - \frac{\partial R_2}{\partial x} - Q_z - (M_y(\bar{F}_1) + M_y(\bar{q}_1)) \right] \delta \alpha_1 = 0, \\ &\left[-\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho S_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} + \frac{\partial R_4}{\partial x} + (\bar{F}_2 + \bar{q}_2) \right] \delta v = 0, \quad (9) \\ &\left[\rho S_z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \rho I_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} - \frac{\partial M_z^T}{\partial x} - \frac{\partial R_3}{\partial x} - Q_y - (M_z(\bar{F}_1) + M_z(\bar{q}_1)) \right] \delta \alpha_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\left[-\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho S_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + \rho S_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + \frac{\partial N_x^T}{\partial x} + \frac{\partial R_1}{\partial x} + (\bar{F}_1 + \bar{q}_1) \right] \delta u = 0,$$

$$\left[-\rho S_y \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho S_z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho I_\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial R_6}{\partial x} + (M_x(F_{23}) + M_x(q_{23})) \right] \delta \theta = 0.$$

Обобщенные естественные начальные условия движения стержня с учетом температуры при пространственных нагружениях:

$$\left[\rho F \frac{\partial w}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta w \Big|_t = 0; \quad \left[-\rho S_y \frac{\partial u}{\partial t} + \rho I_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \rho I_{yz} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right] \delta \alpha_1 \Big|_t = 0;$$

$$\left[\rho F \frac{\partial v}{\partial t} + \rho S_y \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta v \Big|_t = 0; \quad \left[-\rho S_z \frac{\partial u}{\partial t} + \rho I_{yz} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \rho I_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right] \delta \alpha_2 \Big|_t = 0; \quad (10)$$

$$\left[\rho F \frac{\partial u}{\partial t} - \rho S_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right] \delta u \Big|_t = 0; \quad \left[\rho S_y \frac{\partial v}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial w}{\partial t} + \rho I_\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta \theta \Big|_t = 0.$$

Обобщенные естественные граничные условия движения стержня с учетом температуры при пространственных нагружениях:

$$\left[-(Q_z + R_5) + \bar{\varphi}_3 \right] \delta w \Big|_x = 0; \quad \left[-(M_y^T + R_2) + M_y(\varphi_1) \right] \delta \alpha_1 \Big|_x = 0;$$

$$\left[-(Q_y + R_4) + \bar{\varphi}_2 \right] \delta v \Big|_x = 0; \quad \left[-(M_z^T + R_3) + M_z(\varphi_1) \right] \delta \alpha_2 \Big|_x = 0; \quad (11)$$

$$\left[-(N_x^T + R_1) + \bar{\varphi}_1 \right] \delta u \Big|_x = 0; \quad \left[-(M_x + R_6) + M_x(\varphi_{23}) \right] \delta \theta \Big|_x = 0.$$

Для решения система уравнения движения (9) при граничных условиях (10) и начальном условии (11) переходим к безразмерным перемещениям и координатам [6-8], $u = a\bar{u}$, $v = a\bar{v}$, $w = a\bar{w}$, $x = l\bar{x}$, $t = t_0\bar{t}$, и делим на EFa^2/l^2 , здесь принимаем (1-1) - Отсюда определяем масштаб времени t_0 . $t_0 = l\sqrt{\rho/E}$. Нелинейная математическая модель процессов колебания пространственно-нагруженных стержней с учетом температуре дифференциальное уравнение, начальные и граничные условия в векторной форме имеют вид:.

$$M \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial \bar{t}^2} + A \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial \bar{x}^2} + B \frac{\partial \vec{U}}{\partial \bar{x}} + C\vec{U} + \left(\vec{\Phi} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial \bar{x}^2} + D\vec{F}_i = 0, \quad (12)$$

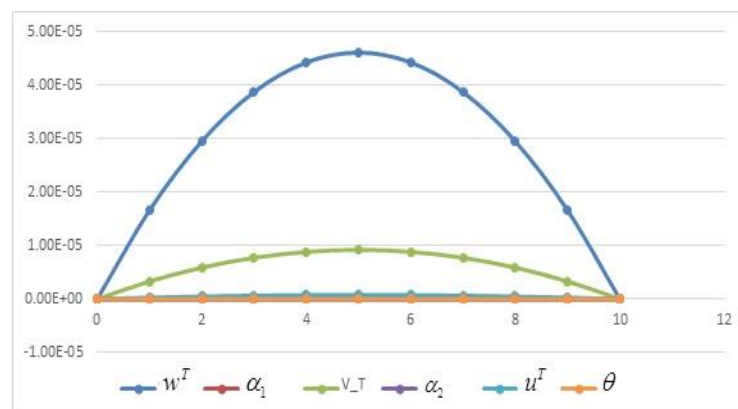
$$\bar{M} \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial \bar{t}} t_0 \right] \delta \vec{U} \Big|_{\bar{t}} = 0, \quad (13)$$

$$\bar{A} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{C} \vec{U} + \left(\bar{\Phi} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{D} \bar{F}_i = 0, \quad (14)$$

В соответствии с уравнениями (12), начальными условиями (13) и граничными условиями (14) формируем следующие матрицы M , A , B , C , \bar{M} , \bar{A} и \bar{B} .

Для расчета стержней используются следующие значения параметров: модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0,3$ (для стали), длина $l = 10 \text{ м}$, рассматриваемые поперечные сечения $a = 0,02 \text{ м}$, $b = 0,02 \text{ м}$, поверхностные нагрузки $q_1 = 0,015 \text{ Н}$, $q_2 = 0,01 \text{ Н}$, $q_3 = 0,02 \text{ Н}$, $M = 0,012 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Полученные результаты приведены ниже в виде графиков.



1-рис. Распространение продольных u^T , поперечные колебаний w^T, v^T и угла наклона α_1, α_2 , угол закручивания θ с учетом температуры

Заключение. На основе обобщенного вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, теории упругих деформаций и уточненной теории Власова-Джанелидзе-Кабулова разработаны обобщенные математические модели для статики и динамики, нелинейных задач стержней при пространственном нагружении с учетом температуры. Данные модели служат для подробного описания процессов геометрически нелинейного деформирования стержней с учетом совместного действия продольных, поперечных и крутильных сил.

На основе центральные конечно-разностные соотношения метода прогонка с точностью до второго порядка разработан вычислительный алгоритм для расчета статики и динамики нелинейных задач стержней при пространственном нагружении с учетом температуры. На основе данного алгоритма решены тестовые примеры, полученные результаты оценены по критериям достоверности и точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабулов В.К. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. – Ташкент: Фан, 1966. – 395 с.
2. Кабулов В.К., Файзуллаев О.Х., Назиров Ш.А. Ал-Хоразми, алгоритм, алгоритмизация. - Ташкент: Фан, 2006. – 664 с.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
4. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – Л.: ГИТТЛ, 1948. – 211 с.
5. Тимошенко С.П., Гудьер Д. 1979 г, с-458.
6. Anarova S., Ismoilov S. Nonlinear mathematical model of stress-deformed state of spatially loaded rods with account for temperature //AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC, 2021. – Т. 2365. – №. 1. – С. 070019.
7. Anarova S. A., Ismoilov S. H. M., Abdirozikov O. S. Software of Linear and Geometrically Non-linear Problems Solution Under Spatial Loading of Rods of Complex Configuration //Intelligent Human Computer Interaction: 12th International Conference, IHCI 2020, Daegu, South Korea, November 24–26, 2020, Proceedings, Part I 12. – Springer International Publishing, 2021. – С. 380
8. Anarova, Sh A., and Sh M. Ismoilov. "Mathematical support of the stress-strain state of rods under spatial load considering temperature." Проблемы вычислительной и прикладной математики 4 (2020): 5-19.