СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗНЫХ ФОРМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Джурақулов Рахматжон

Андижанский институт сельского хозяйства и агротехнологий, доцент

Андижан, Узбекистан

Аннотация. *Многие задачи механики, теории аналитических функции математической физики и т.д. связаны с многомерными сингулярными интегральными уравнениями. Поэтому естественно интересен вопрос о том, какая существует связь между разными формами сингулярных интегралов и в статье изучается именно этот вопрос на примере* $\Phi(x)=\iint\limits_{S}\frac{M(x,y)}{r^2}\varphi(y)dy$*, где* $\varphi(x)$ *и* $\Phi(x)$ *- вектор функции, а* $M(x,y)$ *некоторая матрица, если* $x\in S,$ *то данный интеграл является сингулярным интегралом.*

Ключевые слова: вычислительная математика, квадратурная формула, кубатурная формула, сингулярный интеграл, интеграл с ядром Гильберта

THE RELATIONSHIP BETWEEN DIFFERENT FORMS OF REPRESENTATION OF MULTIDIMENSIONAL SINGULAR INTEGRALS.

Djurakulov Rakhmatjon

Andijan Institute of Agriculture and Agrotechnology, docent

Andijan, Uzbekistan

Abstract. Many problems of mechanics, theory of analytical functions of mathematical physics, etc. are connected with multidimensional singular integral equations. Therefore, naturally the question of what connection exists between different forms of singular integrals is of interest and in the article this question is

studied on the example of $\Phi(x)=\iint\limits_S \frac{M(x,y)}{r^2}\varphi(y)dy$ *, where* $\varphi(x)$ *and are the vector of the function, and* $M(x,y)$ *is some matrix, if* $x\in S$*, then this integral is a singular integral.*

Keywords: computational mathematics, quadrature formula, cubature formula, singular integral, integral with Hilbert kernel.

Ряд задач механики, теории аналитических функций, математической физики и других областей тесно связан с многомерными интегральными уравнениями [1]. Это обусловливает необходимость разработки приближённых методов для вычисления многомерных сингулярных интегралов. Вопрос о построении квадратурных и кубатурных формул как для обычных, так и для сингулярных интегралов является одним из наиболее актуальных направлений вычислительной математики. Он вызывает устойчивый научный интерес, о чём свидетельствует большое количество разнообразных работ в данной области.

Так, в работах В. В. Иванова [3, 4], Б. Г. Габдулхаева [2] и других, получили значительное развитие теория и практика сингулярных квадратур. В исследованиях [5–6, 8–10] рассматриваются различные подходы к построению квадратурных и кубатурных формул для интегралов с ядром Коши. Работа [7] посвящена построению приближённых формул для интегралов с ядром Гильберта. В связи с этим естественным представляется вопрос о существующих связях между различными формами сингулярных интегралов, в частности — между интегралами с ядрами типа Коши и Гильберта.

С этой целью в настоящей работе мы рассмотрим указанный вопрос на примере следующего интеграла:

$$Vf = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(X,\theta)}{r^2} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2, \tag{1}$$

где $\theta = \dfrac{Y - X}{\|Y - X\|}$.

Если

$$\varphi(X,\theta) = b(X)\theta = \frac{Y - X}{\|Y - X\|} b(X),$$

то интеграл (1) примет вид:

$$Vf = b(X)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y - X}{\|Y - X\|} \frac{f(y_1, y_2)}{\|Y - X\|^2} dy_1 dy_2,$$

и

$$(Vf)_1 = b(x_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} \frac{f(y_1, y_2)}{r^2} dy_1 dy_2, \tag{2}$$

$$(Vf)_2 = b(x_2)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_2 - x_2}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} \frac{f(y_1, y_2)}{r^2} dy_1 dy_2, \tag{3}$$

В последних интегралах проведем замену

$$y_1 = i\frac{1 + t_1}{1 - t_1},\ y_2 = i\frac{1 + t_2}{1 - t_2},\ x_1 = i\frac{1 + \tau_1}{1 - \tau_1},\ x_2 = i\frac{1 + \tau_2}{1 - \tau_2},$$

после чего имеем

$$(Vf)_1 = -4b\left(i\frac{1 + \tau_1}{1 - \tau_2}\right)\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{\dfrac{1 + t_1}{1 - t_1} - \dfrac{1 + \tau_1}{1 - \tau_1}}{\sqrt{\left(\dfrac{1 + t_1}{1 - t_1} - \dfrac{1 + \tau_1}{1 - \tau_1}\right)^2 + \left(\dfrac{1 + t_2}{1 - t_2} - \dfrac{1 + \tau_2}{1 - \tau_2}\right)^2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{f\left(i\dfrac{1 + t_1}{1 - t_1}, i\dfrac{1 + t_2}{1 - t_2}\right)}{\left[\left(\dfrac{1 + t_1}{1 - t_1} - \dfrac{1 + \tau_1}{1 - \tau_1}\right)^2 + \left(\dfrac{1 + t_2}{1 - t_2} - \dfrac{1 + \tau_2}{1 - \tau_2}\right)^2\right]} \frac{dt_1 dt_2}{(1 - t_1)^2 (1 - t_2)^2},$$

или

$$(Vf)_1 = -4b\left(i\frac{1+\tau_1}{1-\tau_2}\right)\iint_{\gamma_1\,\gamma_2} \frac{\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}}{\sqrt{\left(\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\dfrac{1+t_2}{1-t_2}-\dfrac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{f\left(i\dfrac{1+t_1}{1-t_1}, i\dfrac{1+t_2}{1-t_2}\right)(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)}{\left[\left(\dfrac{1+t_1}{1-t_1}-\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\dfrac{1+t_2}{1-t_2}-\dfrac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2\right](1-t_1)^2(1-t_2)^2}\frac{dt_1dt_2}{(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)}, \quad (4)$$

где γ_1, γ_2 – единичные окружности.

Рассмотрим теперь величины

$$\frac{y_1-x_1}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}}, \quad (5)$$

$$\frac{y_2-x_2}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}} \quad (6)$$

из подынтегральных выражений (2) и (3). Они являются ограниченными величинами, то есть можно показать, что

$$\frac{|y_1-x_1|}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}} \le 1,$$

$$\frac{|y_2-x_2|}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}} \le 1.$$

Кроме того, если одним и тем же законом $y_1 \to x_1$ и $y_2 \to x_2$, то (5) и (6) стремятся к одному и тому же пределу $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Аналогичные рассуждения имеют места и относительно следующих величин:

$$\frac{\frac{1+t_1}{1-t_1}-\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}}{\sqrt{\left(\frac{1+t_1}{1-t_1}-\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\frac{1+t_2}{1-t_2}-\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}}, \quad \frac{t_1-\tau_1}{\sqrt{\left(\frac{1+t_1}{1-t_1}-\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\frac{1+t_2}{1-t_2}-\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}}$$

и

$$\frac{t_2-\tau_2}{\sqrt{\left(\frac{1+t_1}{1-t_1}-\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\frac{1+t_2}{1-t_2}-\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}}.$$

Введя обозначения

$$b\left(t\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)=b_1(\tau_1),$$

$$g_1(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)=\frac{4\left(\frac{1+t_1}{1-t_1}-\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)\,f\left(i\frac{1+t_1}{1-t_1},i\frac{1+t_2}{1-t_2}\right)}{\left[\left(\frac{1+t_1}{1-t_1}-\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\frac{1+t_2}{1-t_2}-\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2\right]^{3/2}(1-t_1)^2(1-t_2)^2},$$

из (4) имеем

$$(Vf)_1=b_1(\tau_1)\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}\frac{g_1(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)\,dt_1dt_2}{(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)}, \tag{7}$$

Аналогичным путем получаем, что

$$(Vf)_2=b_2(\tau_2)\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}\frac{g_2(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)\,dt_1dt_2}{(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)}, \tag{8}$$

где

$$b_2(\tau_2)=b\left(i\frac{1+\tau_2}{1-\tau_1}\right),$$

$$g_2(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)=\frac{4\left(\frac{1+t_2}{1-t_2}-\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)f\left(i\frac{1+t_1}{1-t_1},i\frac{1+t_2}{1-t_2}\right)}{\left[\left(\frac{1+t_1}{1-t_1}-\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\frac{1+t_2}{1-t_2}-\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2\right]^{3/2}(1-t_1)^2(1-t_2)^2}.$$

Таким образом, можно установить связь [1] между интегралами вида (7) и (8) и сингулярными интегралами с ядром Гильберта.

Литература

1. Н.И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз,1968.

2. Б,Г,Габдулхаев. Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов. Изв. Вузов. Математика, 1975, №4.

3. Иванов В.В. Приближённое вычисление сингулярных интегралов. Научные труды Новочеркасского политехнического института., 1958. 67(81).

4. Иванов В.В. Об оптимальных алгоритмах вычисления сингулярных интегральный уравнений. В сб. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа». М. Наука. 1972

5. Джуракулов Р., Исраилов М.И. Построение весовых кубатурных формул для сингулярных интегралов с помощью – сплайн функции. Изв.вузов, Математика, 1980, №9, 7-12.

6. Джуракулов Р. О некоторых квадратурных формулах для интегралов типа Коши и сингулярных интегралов специального вида. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 51. Т. 1978.19-25.

7. Исраилов М.И., Максудов Т.С. Квадратурные и кубатурные формули для сингулярных интегралов с ядром Гильберта на классе функций E_S^α. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. №28. Т. 1974,31-45.

8. Z. O. Nurmatov, O.B.Eshqobulov. Kosh yadroli singulyar integralni taqribiy hisoblash uchun optimal formula qurish. Central azian journal of education and innovatsion. May. 2003.

9. Шешко М.А. О сходимости квадратурного процесса для сингулярного интеграла. Изв. вузов. Математика. 1976, №2 с.108-118.

10. Ш.С.Хубежты. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Коши. Владикавк. матем. журн. 2008.Том 10, №4, 61-75