Шомурзаева Г. Г.
Студентка БХА-01/24r
Ташкентского Государственного Экономического Университета
Узбекистан, Ташкент

Пошаходжаева Г. Д.
Доцент
Ташкентского Государственного Экономического Университета
Узбекистан, Ташкент

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация: В этой научной работе рассматриваются некоторые типы задач, связанных с определением оптимальных планов совокупного материального производства отдельных отраслей и предприятий с помощью линейного программирования.

Ключевые слова: линейное программирование, матрица, затраты, стоимость, сбалансированность производственного плана, конечный продукт, объективные ограничения, плановые ограничения, объём производства, оптимальный вариант производства.

Shomurzaeva G.G.
Student BHA-01/24r
Tashkent State University of Economics
Uzbekistan, Tashkent

Poshakhodjaeva G.D.
Associate Professor

Tashkent State University of Economics

Uzbekistan, Tashkent

SOME PROBLEMS OF LINEAR PROGRAMMING WITH A LARGE NUMBER OF VARIABLES

Abstract: This scientific work considers some types of problems related to determining optimal plans for the aggregate material production of individual industries and enterprises using linear programming.

Keywords: linear programming, matrix, costs, value, balanced production plan, final product, objective constraints, planned constraints, production volume, optimal production option.

Некоторые задачи линейного программирования с большим числом переменных. В большинстве случаев поиски оптимальных вариантов плана связаны с решением задач линейного программирования с большим числом переменных.

А. Определение оптимального плана материального производства. Предположим, что

1) производство сырья и материалов делится на n отраслей;

2) дана матрица B = [b_{ij}] (i, j = 1, 2, …, n) коэффициентов материальных затрат в плановом периоде;

3) даны значения конечных продуктов $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, …. , $x_n^{(0)}$ (в стоимостном выражении) на период, предшествующий плановому периоду.

Если объемы продукции отдельных отраслей обозначить x_1, x_2, …, x_n , то условие внутренней сбалансированности плана есть система уравнений:

$$b_{11}X_1+b_{12}X_2+\ldots+b_{1n}X_n+X_1=X_1, \qquad b_{21}X_1+b_{22}X_2+\ldots+b_{2n}X_n+X_2=X_2,$$

(1)

$$b_{n1}X_1+b_{n2}X_2+\ldots+b_{nn}X_n+X_n=X_n,$$

где x_1, x_2, …, x_n - плановые конечные продукты отдельных отраслей производства.

Разным вариантам конечного общественного продукта соответствуют разные варианты производственных планов отдельных отраслей. Оптимальным вариантом плана материального производства можно признать такой вариант, который, например, обеспечивает получение конечного продукта, не меньшего, чем в период, предшествующий плановому, и максимального объема продукции в стоимостном выражении. Следовательно, оптимальным будет такой вариант плана, который удовлетворяет условиям:

$$x_i = X_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j \geq X_i^{(0)} (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{i=max} \quad . \quad (3)$$

Для производства необходимы следующие факторы:

1) предметы труда p,

2) средства труда m,

3) рабочая сила s,

которые имеются в ограниченных количествах.

При построении оптимального варианта производственного плана необходимо определить:

1) нормы расхода факторов производства, имеющихся в ограниченных количествах;

2) размеры запасов по факторам производства;

3) нижние пределы объемов конечных продуктов.

Примем в качестве критерия оптимальности производства максимум конечного общественного продукта; пусть матрица

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12}\cdots & P_{1n} \\ m_{11} & m_{12}\ldots & m_{1n} \\ S_{11} & S_{12}\ldots & S_{1n} \end{bmatrix}$$

будет матрицей норм расхода факторов производства (на единицу конечного продукта). Предположим также, что размеры запасов факторов производства составляют соответственно P, M и S.

Следовательно, оптимальным будет такой вариант плана материального производства, который удовлетворяет условиям:

$$x_i = X_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j \geq x_i^{(0)} (i=1,2,\ldots,n),(2)$$

$$p_{11} x_1 + p_{12} x_2 + \ldots + p_{1n} x_n \leq P, \quad (4)$$

$$m_{11} x_1 + m_{12} x_2 + \ldots + m_{1n} x_n \leq M, \quad (5)$$

$$s_{11} x_1 + s_{12} x_2 + \ldots + s_{1n} x_n \leq S, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i=max} \quad . \quad (7)$$

Условия (4), (5), (6) означают, что расход не может превысить ресурсы этих факторов.

Оптимальный вариант плана материального производства можно также определить и другим способом. Предположим, что нам известны:

1) матрица материальных затрат

$B = [b_{ij}] (i, j = 1, 2, \ldots, n)$,

2) затраты живого труда $z_j (j=1,2,\ldots,n)$ на единицу продукции в стоимостном выражении,

3) максимальная занятость z в материальном производстве,

4) заданные конечные продукты $x_i^{(0)} (i=1,2,\ldots,n, i \neq k)$.

В качестве оптимального проекта плана можно принять такой вариант, при котором конечный продукт k-й отрасли максимальный, конечные продукты других отраслей не меньше намеченных уровней, а занятость не превышает величины Z. Следовательно, оптимальной будет структура производства в отдельных отраслях, которая удовлетворяет условиям:

$$X_i-\sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j \geq X_i^{(0)} (i=1,2,\ldots,n), \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j X_j \leq Z, \quad (9)$$

$$X_j \geq 0 (j=1,2,\ldots,n), \quad (10)$$

$$x_k = X_k - \sum_{j=1}^{n} b_{kj} X_j = max. \quad (11)$$

Можно также определить и иные критерии оптимальности производственного плана. Предположим, что материальное производство делится на n отраслей, причем межотраслевые связи определяет матрица

$$B=[b_{ij}](i,j=1,2,\ldots,n).$$

Предположим далее, что z_j- количество рабочей силы, необходимое для производства единицы продукции j-й отрасли, а занятость, не связанная с производством, есть z_0. Если стоимость продукции j-й отрасли обозначить X_j, то $z_j X_j$ определяет затраты труда, необходимые для осуществления производства в j-й отрасли, а суммарные затраты общественного труда, необходимые для выполнения производственного плана, составляют:

$$\sum_{j=1}^{n} z_j X_j.$$

Если ресурсы рабочей силы составляют z_0, то должно удовлетворяться уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} z_j X_j + z_0 \leq Z_0.$$

Кроме того, имеют место балансовые уравнения продукции:

$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j \geq x_i (i=1,2,\ldots,n)$,где x_i- конечный продукт i-й отрасли.

В качестве оптимального можно рассматривать такой вариант производственного плана, который обеспечивает получение соответствующих конечных продуктов

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$$

при минимальных затратах общественного труда. Таким образом, необходимо определить X так, чтобы

$$Z = \sum_{j=1}^{n} z_j X_j = min \text{ при условиях :}$$

$$X_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j = x_i^{(0)} (i=1,2,\ldots,n), \qquad (13)$$

$$X_j \geq 0, x_i^{(0)} \geq 0 (i, j=1,2,\ldots,n), \qquad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j X_j + z_0 \leq Z_{0.} (15)$$

Неравенства в задачах оптимального планирования представляют собой определенные ограничения своюэбоды выбора варианта плана. Эти ограничения можно разделить на две группы:

1) объективные ограничения,

2) плановые ограничения.

Объективные ограничения не зависят от решений, связанных с планом, например от состояния и структуры основных средств на начало планового периода, размера спроса и предложения на внешних рынках, существующей техники производства, ресурсов рабочей силы, имеющихся в наличии на начало периода и т. п.

Плановые ограничения устанавливаются на основе определенных социально-экономических решений. К ним можно отнести такие ограничения, как необходимые размеры коллективного потребления, объем непроизводственных капиталовложений, занятость в материальном производстве, намеченные валютные сальдо в обороте с отдельными внешними рынками, намеченные уровни заработной платы и других доходов населения.

Б. Определение плана отрасли производства. Пусть отрасль производства представлена объединением, в подчинении которого находится n промышленных предприятий, каждое из которых производит продукты 1, 2, …, m.

Для объединения установлен план производства отдельных продуктов в количествах A_1, $A_2, \ldots, A_m$. Плановые производственные мощности предприятий (в рабочих часах) составляют соответственно T_1, $T_2, \ldots, T_n$, а издержки производства на единицу продукта в соответствующем предприятии составляют $c_{ij}(i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n)$. Оптимальным будет такой план, при котором издержки производства планируемой продукции объединения будут минимальными.

Обозначим через $x_{ij}(i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n)$ объем производства i-го продукта в плановом периоде на j-м предприятии. Должны выполняться условия:

$$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=A_1, \quad x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=A_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=A_m,$$

(некоторые из переменных x_{ij} могут равняться нулю).

Второе условие, которое должны выполнять переменные x_{ij}, связано с тем, что объем производства на каждом предприятии не может превышать его производственных мощностей. Поэтому должны выполняться условия:

$$t_{11}x_{11}+t_{21}x_{21}+\ldots+t_{m1}x_{m1}\le T_1, \quad t_{12}x_{12}+t_{22}x_{22}+\ldots+t_{m2}x_{m2}\le T_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$t_{1n}x_{1n}+t_{2n}x_{2n}+\ldots+t_{mn}x_{mn}\le T_n.$$

Очевидно, что должны также выполняться условия:

$$x_{ij}\ge 0(i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n). \quad (3)$$

Поскольку объем производства в отрасли следует так распределить между предприятиями, чтобы совокупные издержки производства были минимальны, то должно выполняться условие:

$$C=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+¿ \qquad +c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+¿ \quad (4)$$

$$+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn}=min.$$

Решение задачи сводится к тому, чтобы найти такие значения неизвестных $x_{ij}(i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n)$, чтобы они удовлетворяли условиям (1), (2), (3) и чтобы выражение (4) приняло минимальное значение.

В рассматриваемом случае критерий оптимальности – издержки производства. Можно также принять и иной критерий оптимальности, например максимальное использование производственных мощностей предприятий. Тогда оптимальным будет такой вариант плана объединения, для которого выполняются условия (1), (2), (3) и

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_{ij}=max. \qquad (5)$$

Пример. В качестве примера рассмотрим оптимальный план размещения сельскохозяйственного производства. Пусть площадь пахотных земель по урожайности с 1 га разделена на две зоны. Урожайность четырех видов зерновых и картофеля, а также затраты труда (в рабочих часах) приведены в следующей таблице:

	Зерновое по зоне		**Картофель по зоне**	
	I	II	I	II
Урожайность (ц) .	18	20	110	70
Затраты (в рабочих часах) . . .	0,8	1	11	14

Ресурсы факторов производства составляют следующие величины:

	Зона	
	I	II
Сельскохозяйственные угодья (тыс. га)	650	550
Рабочие дни (тыс.) . . .	1000	1200

Факторы производства по зонам	Единица измерения	Зона I		Зона II		Ресурсы факторов производства
		Зерно- вые	Карто-фель	Зерно- вые	Карто-фель	
Сельскохозяйственные угодья в зоне I . . .	га.	0,04	0,02			650
Рабочие дни в зоне I . .	ед.	0,04	0,2			1000
Сельскохозяйственные угодья в зоне II . . .	га.			0,0725	0,01	550
Рабочие дни в зоне II. .	ед.			0,12	0,17	1200

Цена зерновых установлена в размере 220 злотых за центнер, а картофеля - 130 злотых за центнер. По плану производство зерновых должно составить не менее 15 млн. ц, а картофеля - не менее 7 млн. ц.

Из этих данных следует, что затраты факторов производства на 1 ц продукции составляют величины, приведенные в таблице:

Плановые объёмы производства зерновых и картофеля в зоне I обозначим x1, x2, а в зоне II - x3 и x4. Имеем следующие ограничения:

$$0{,}04x1 + 0{,}02x2 \leq 650\,000 \qquad (6)$$

$$0{,}04x1 + 0{,}2x2 \leq 1\,000\,000 \qquad (7)$$

$$0{,}0725x3 + 0{,}01x4 \leq 550\,000 \qquad (8)$$

$$0{,}12x3 + 0{,}17x4 \leq 1\,200\,000 \qquad (9)$$

$$x1 + x3 \geq 15\,000\,000 \qquad (10)$$

$$x2 + x4 \geq 7\,000\,000 \qquad (11)$$

Если в качестве критерия оптимальности принять максимальную стоимость сельскохозяйственной продукции, то оптимальным будет такой вариант плана сельскохозяйственного производства, в котором неизвестные x1, x2, x3 и x4 удовлетворяют условиям (6) - (11) и в котором для неизвестных выражение

$$(x1 + x3)\,220 + (x2 + x4)\,130$$

принимает максимальное значение.

Список использованной литературы

1. Ашманов С. А. “Линейное программирование” (1981)
2. Палий И. А. “Линейное программирование” (2008)
3. В. И. Бахтин, И. А. Иванишко “Линейное программирование”
4. Х. Э. Крыньский “Математика для экономистов” (1970)
5. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн “Задачи и методы линейного программирования”