УДК 517.947.5

Танирбергенов Муратбек Базарбаевич

Кандидат математических наук, доцент

Юсупджанова Рая

Магистрант 2 курса

Каракалпакский государственный университет им. Бердаха

Республики Узбекистан

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ, ЗАДАННОГО ПО ВСЕЙ ЧИСЛОВОЙ ОСИ

Аннотация

Статья посвящена решению прямых и обратных задач для уравнений Штурма-Лиувилля, заданного на число всей оси. Исследуются основные математические методы и подходы для нахождения явления и собственные функции оператора Штурма-Лиувилля, а также исследуются условия, при которых задачи имеют решения.

Ключевые слова: решение Йоста, уравнения, коэффициент, число, функция, лемма.

Tanirbergenov Muratbek Bazarbaevich

Candidate of Mathematical Sciences, Associate Professor

Yusupdzhanova Raya

2nd year Master's student

Karakalpak State University named after Berdakh

Republic of Uzbekistan

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR THE STURM-LIOUVILLE EQUATION, SPECIFIED ON THE ENTIRE NUMERICAL AXIS

Abstract

The article is devoted to solving direct and inverse problems for the Sturm-Liouville equations, specified on the entire axis. The main mathematical methods

and approaches for finding the phenomenon and eigenfunctions of the Sturm-Liouville operator are investigated, and the conditions under which the problems have solutions are investigated.
Keywords: *Jost solution, equations, coefficient, number, function, lemma.*

В данной статье мы рассмотрим классические понятия, связанные с уравнением Штурма-Лиувилля, заданным перед целым числом. Поэтому приведем некоторые теоремы и леммы.

Пусть дана задача ниже, т.е.

$$-y'' + q(x)y = k^2 y, \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.1}$$

здесь потенциал $q(x)$ является действительной функцией

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\,|q(x)|\,dx < \infty \tag{1.2}$$

удовлетворяет условие. Уравнение (1.1) при условии (1.2)

$$f(x,k) = e^{ikx} + \overline{\overline{o}}(1), \qquad f'(x,k) = ik\,e^{ikx} + \overline{\overline{o}}(1), \quad (x \to +\infty) \tag{1.3}$$

$$g(x,k) = e^{-ikx} + \overline{\overline{o}}(1), \qquad g'(x,k) = -ik\,e^{-ikx} + \overline{\overline{o}}(1), \quad (x \to -\infty) \tag{1.4}$$

определены асимптотические решения. Эти решения называются решениями Йоста уравнения (1.1).

Лемма 1.1. Решения задачи (1.1) - (1.2) являются решениями следующего интегрального уравнения**:** $f(x,k) = e^{ikx} + \int_{x}^{+\infty} \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t) f(t,k)\,dt$,

$$g(x,k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t) g(t,k)\,dt.$$

Для решений Йоста справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. (Левин Б.Я.) Для решений задачи (1.1) - (1.2) справедлив следующий интегральный вид:

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_{x}^{\infty} A^{+}(x,t) e^{ikt}\,dt, \tag{1.5}$$

$$g(x,k)=e^{-ikx}+\int_{-\infty}^{x}A^{-}(x,t)e^{-ikt}dt. \tag{1.6}$$

Кроме того

1. $A^{+}(x,y),\ A^{-}(x,y)$ ядра связаны с $q(x)$ потенциалом следующими уравнениями

$$q(x)=-2\frac{d}{dx}A^{+}(x,x),\qquad q(x)=2\frac{d}{dx}A^{-}(x,x), \tag{1.7}$$

2. Для любых конечных x

$$\int_{x}^{\infty}|A^{+}(x,t)|\,dt<\infty,\qquad \int_{-\infty}^{x}|A^{-}(x,t)|\,dt<\infty \tag{1.8}$$

Результат. $f(x,k)$ и $g(x,k)$ функции по переменной можно аналитически продолжить в высшую комплексную полуплоскость.

В действительных значениях $\operatorname{Im}k=0\ (k\neq 0)$ пара функций $\{f(x,k),\ f(x,-k)\}$ и $\{g(x,k),\ g(x,-k)\}$ образует систему фундаментальных решений. Поэтому

$$f(x,k)=b(k)g(x,k)+a(k)g(x,-k), \tag{1.9}$$

$$g(x,k)=c(k)f(x,k)+d(k)f(x,-k). \tag{1.10}$$

Лемма-1.2. Если будет $\operatorname{Im}k=0,\quad k\neq 0$, то

1) $a(-k)=\overline{a(k)},\qquad b(-k)=\overline{b(k)};$

2) $c(k)=-b(-k),\qquad d(k)=a(k);$

3) $a(k)=-\dfrac{1}{2ik}W\{f(x,k),\ g(x,k)\};$

4) $b(k)=\dfrac{1}{2ik}W\{f(x,k),\ g(x,-k)\};$

5) $|a(k)|^{2}=1+|b(k)|^{2};$

6) $b(k)=O\left(\dfrac{1}{|k|}\right),\quad |k|\to\infty;$

7) в $\operatorname{Im}\ k\geq 0$ равномерно

$$a(k)=1+O\left(\frac{1}{|k|}\right),\quad |k|\to\infty;$$

8) $a(k)$ функция является аналитической функцией в $\operatorname{Im} k>0$ верхней полуплоскости и имеет предельное число простых нулей $k_j = i\chi_j,\ j=\overline{1,n}$, а числа являются собственными значениями уравнения (1.1).

Пример 1. Ниже

$$-y'' - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x} y = k^2 y, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

найдите решения Йоста уравнения и коэффициенты теории рассеяния $a(k)$ и $b(k)$.

Решение: будем искать решение Йоста $f(x,k)$ этого уравнения

$f(x,k) = Ae^{ikx}(2k + ia(x))$

привести к уравнению $f(x,k)$, при этом

$$(2k+ia(x))k^2 e^{ikx} + 2ka'(x)e^{ikx} - ie^{ikx}a''(x) -$$

$$-\frac{2}{\operatorname{ch}^2 x} e^{ikx}(2k+ia(x)) = k^2(2k+ia(x))e^{ikx}$$

получим равенство. Если уравнять коэффициенты перед одинаковыми степенями k, то

$$\begin{cases} a'(x) = \dfrac{2}{\operatorname{ch}^2 x}, \\ a''(x) = -\dfrac{2}{\operatorname{ch}^2 x} a(x) \end{cases}$$

будем иметь равенства. Отсюда

$$-\frac{4}{\operatorname{th}^3 x} \operatorname{sh} x = -\frac{2}{\operatorname{ch}^2 x} a(x).$$

Значит, $a(x) = 2\operatorname{th} x.$ Таким образом,

$$f(x,k) = Ae^{ikx}(2k + 2i\operatorname{th} x)$$

$f(x,k) \underset{x\to\infty}{\to} e^{ikx}$ с учетом асимптотики получим равенства

$$A(2k+2i) = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2(k+i)} \text{ хам } f(x,k) = e^{ikx}\frac{k+i\operatorname{th} x}{k+i}.$$

Именно так можно вывести $g(x,k)=e^{-ikx}\dfrac{k-i\,\mathrm{th}\,x}{k+i}$. При помощи найденных $f(x,k)$ и $g(x,k)$ решений Йоста мы получим

$$W\{f(x,k),\,g(x,k)\}=W\{f(x,k),\,g(x,k)\}\Big|_{x=0}=$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{k}{k+i} & \dfrac{k}{k+i} \\ \dfrac{ik^2+i}{k+i} & \dfrac{-ik^2-i}{k+i} \end{vmatrix}=\frac{-2ik(k-i)}{k+i}$$

Здесь по формуле 3) находим $a(k)=\dfrac{k-i}{k+i}$

Именно таким образом

$$W\{f(x,k),\,g(x,-k)\}=\begin{vmatrix} \dfrac{k}{k+i} & \dfrac{k}{k+i} \\ \dfrac{ik^2+i}{k+i} & \dfrac{ik^2-i}{k+i} \end{vmatrix}=0,\qquad b(k)=0.$$

Пример 2. Уравнение

$$-y''-2b\delta(x)y=k^2y,\qquad x\in\mathbb{R}^1$$

найдите решения Йоста, а также коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ теории рассеяния, где $\delta(x)$ - функция Дирака "дельта."

Решение. По лемме 1.1

$$f(x,k)=e^{ikx}-2b\int\limits_x^{\infty}\frac{\sin k(x-t)}{k}\delta(t)f(t,k)dt,$$

$$f(x,k)=\begin{cases} e^{ikx}, & x\ge 0,\\ e^{ikx}-\dfrac{2b\sin kx}{k}, & x\le 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$g(x,k)=\begin{cases} e^{-ikx}+\dfrac{2b\sin kx}{k}, & x\geq 0\\ e^{ikx}, & x\leq 0\end{cases}$$

$$W\{f(x,k),\, g(x,k)\}=W\{f(x,k),\, g(x,k)\}\Big|_{x=+\infty}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ ik & -ik+2b\end{vmatrix}=-2ik+2b\,.$$

Поэтому

$$a(k)=1+\frac{b}{k}i;$$

$$W\{f(x,k),\, g(x,-k)\}=W\{f(x,k),\, g(x,-k)\}\Big|_{x=+\infty}=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ ik & ik+2b\end{vmatrix}=2b$$

Значить,

$$b(k)=-\frac{b}{k}i\,.$$

Использованные источники:

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.:«Мир»,1987.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: «Мир», 1988.
3. Jost R., Kohn W. On the relation between phase shift, energy levels and the potential. //Kgl. Danske Videnskab.Selskab., Mat. -Fys.Medd.,1953, v. 27, № 9.
4. Кулиш П.П. Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера на оси // Матем. заметки. – Москва, 1968. – т.4, № 6. – С. 677-684.
5. Левин Б.Я. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. – Москва, 1956. – т. 106, № 2. – С. 187-190.

6. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. – М.: «Наука», 1984.
7. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. – М.: «Наука», 1988.
8. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: «Наукова думка», 1977.
9. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. – М.: РЖ мат. «Современные проблемы математики». – 1974. – т. 3. – С. 93-180.
10. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. – М.: «Мир», 1980.