УДК 519.613

М.Олимов

кандидат физико-математических наук, Проф.

адрес: НамИСИ, г. Наманган, ул. И. Каримова, 12.

Ш.М.Исмоилов

PhD. по технических наук.

адрес: НамИСИ, г. Наманган, ул. И. Каримова, 12.

Э. Исмоилов

Магистр НамИСИ.

г. Наманган, ул. И. Каримова, 12.

M. Olimov

Candidate of Physico-mathematical Sciences, Professor.

address: NamMQI, Namangan sh I. Karimov street 12.

Sh. M.Ismoilov

Doctor of philosophy (PhD) in technical sciences, ORC-ID 0000-0002-7420-6664, address: NamMQI, Namangan sh I. Karimov street 12.

Ismoilov Elmurodxo‘ja To‘xtasinxo‘ja o‘g‘li

Master of the NamMQI

Namangan sh I. Karimov street 12.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗГИБА СТЕРЖНЯ

CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL MODEL OF ROD BENDING

Аннотация

В данном статье разрабатывается математическая модель для расчета изгиба прямоугольного поперечного сечения стержня (W) на основе вариационного принципа Лагранжа, получается точное решение рассматриваемой краевой задачи, описывается вычислительный алгоритм и проводится сравнительный анализ результатов [1-3].

Ключевые слова Вариационной принцип, потенциальной энергия, внешний сил, моменты, напряжение, модуль упругости, деформация, конечных разностей, метод прогонки.

Abstract
In this article develops a mathematical model for calculating the bending of a rectangular cross-section of a rod based on the Lagrange variational principle, obtains an exact solution to the considered boundary value problem under consideration, describes the computational algorithm and performs a comparative analysis of the results [1-3].

Keywords
Variational principle, potential energy, external forces, moments, stress, elastic modulus, deformation, finite differences, sweep method.

Постановка задачи:

В данной постановке математическая модель перемещения точек стержня и компонента деформаций составляет [3-6]

$$u=-z\alpha_1 \text{ или } u=-z\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-z\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Из закона Гука определяем напряжение:

$$\sigma=E\varepsilon=E\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=-Ez\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{3}$$

где σ – напряжение; E – модуль упругости; ε – деформация.

Для вывода дифференциальных уравнений равновесия стержней используется вариационный принцип Лагранжа [1-10].

$$\delta(-\Pi+A)=0 \tag{4}$$

Теперь на основе вариационного принципа Лагранжа (4) вычисляем вариации потенциальной энергии:

$$\delta\Pi=\int_V \sigma\delta\varepsilon\,dV=\int_V \sigma\delta\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dV=\int_x\left[-\int_F z\sigma\,dF\,\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]dx. \tag{5}$$

Момент силы M определяется в виде:

$$M=\int_F z\sigma\,dF=\int_F -Ez^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dF=-E\frac{bh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Подставим выражение M на формуле (5), и интегрируем его по частям:

$$\int_x \left[-\int_F z\sigma \, dF \, \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx = \int_x \left[-M\delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx = -M\delta \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_x - \int_x \left[\frac{\partial M}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx =$$

$$\text{¿} - M\delta \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_x + \frac{\partial M}{\partial x} \delta w\Big|_x - \int_x \left[\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \delta w \right] dx. \qquad (7)$$

Тогда вариация потенциальной энергии имеет вид:

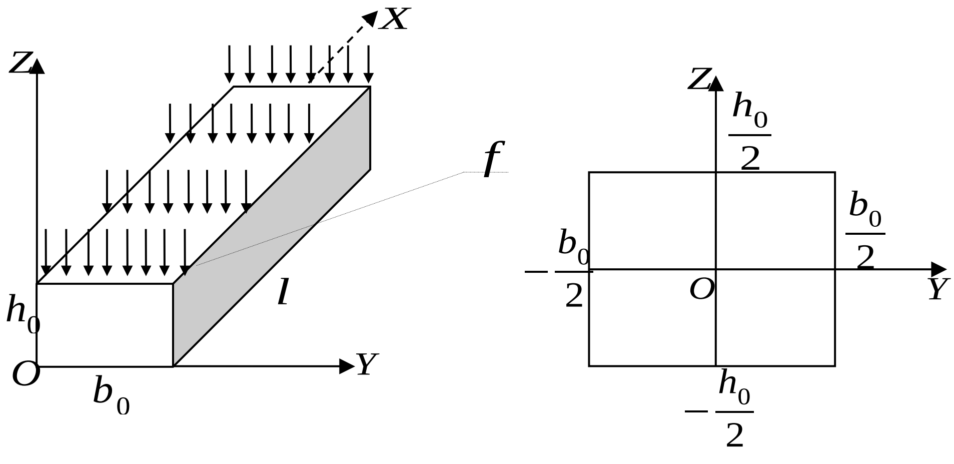
$$\delta \Pi = \left[-M\delta \frac{\partial w}{\partial x} + Q\delta w \right]_x - \int_x \left[\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \delta w \right] dx \qquad (8)$$

или

$$\delta \Pi = EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_x - EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w\Big|_x + \int_x \left[EJ \frac{\partial^4 M}{\partial x^4} \delta w \right] dx \, . \qquad (9)$$

Теперь определяем вариации внешних сил δA:

$$\delta A = \int_x \int_l f\delta \, w dl dx = \int_x f\delta w \int_{-\frac{b_0}{2}}^{\frac{b_0}{2}} dy \, dx = \int_x f b_0 \delta \, w dx \, . \qquad (10)$$



а) б)

Рис. 1. Схема нагружения стержня на изгиб

На основе вариационного принципа Лагранжа (4) получим:

$$\int_x \left[-EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + f b_0 \right] \delta \, w dx = 0 \, . \qquad (11)$$

Введя в уравнение (11), безразмерные величины по зависимостям $x = l\bar{x}$ $w = h_0 \bar{w}$ имеем:

$$-\frac{EJh_0}{l^4}\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4}+fb_0=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4}=\frac{fb_0 l^4}{EJh_0}. \qquad (12)$$

Известно, что изгиб стержня вычисляется с помощью дифференциального уравнения четвертого порядка (12) с соответствующими граничными условиями, например:

$$\bar{w}|¿¿_{x=0}¿_{x=l¿}¿=0¿, \qquad \frac{d\bar{w}}{dx}|¿¿_{x=0}¿_{x=l¿}¿=0¿. \qquad (13)$$

Для решения поставленной задачи принимаем метод конечных разностей [2] аппроксимация краевой задачи (12), (13) и получаем система алгебраических уравнений

$$y_{i+2}-4y_{i+1}+6y_i-4y_{i-1}+y_{i-2}=f_i$$

(14)

i=1,2,...., n-1.

$y_0=0 \qquad y_1=y_{-1}$

$y_n=0 \qquad y_{n+1}=y_{n-1}$

(15)

Решения систем алгебраических уравнений (14), (15) используем метод прогонки, в котором при прямом ходе вычисляются прогоночные коэффициенты, а при обратном – находим решение системы алгебраических уравнений (14).

На основе разработанного вычислительного алгоритма и созданной программы получены точные и приближенные решения краевой задачи (12)-(15) при следующих исходных данных: *l*=2 *м;* h_0=0,1 *м;* b_0=0,05 *м;* f_3^+=5 *МПа;* *E*=2·10^5 *МПа.*

Краевая задача решается с различными значениями шагов сетки h ($h=1/N$, N – число узлов).

Точные и приближенные решения прогиба w при различных значениях числа узлов

	x	Точное решение	Приближенные решения				
			N=10	N=20	N=40	N=80	N=160
w	0.0	0	0	0	0	0	0
	0.1	0,0162	0,0198	0,0171	0,0164	0,0163	0,0162
	0.2	0,0512	0,0576	0,0528	0,0516	0,0513	0,0512
	0.3	0,0882	0,0966	0,0903	0,0887	0,0883	0,0882
	0.4	0,1152	0,1248	0,1176	0,1158	0,1154	0,1152
	0.5	0,1250	0,1354	0,1275	0,1256	0,1252	0,1250

Литература

1. М. Олимов, О. Жакбаров “Математик моделлаштириш” Наманган 2018.
2. Самарский А.А.Михвйлов А.П. Математическое моделирование Москва 2005.
3. Sh.Ismoilov, S.Abdujalilov., B.Yusufbekov. Improved algorithms for determining geometric-mechanical parameters for calculating the stress-strain state of a rod with an arbitrary cross section under spatial loads. // International Scientific and Practical Conference on Actual Problems of Mathematical Modeling and Information Technology. Nukus, Uzbekistan. Melville, New York, 2024. Volume 3147. " AIP Conference Proceedings. Vol. 3147. No. 1. AIP Publis’hing, 2024. // https://doi.org/10.1063/5.0210359.
4. Муродилла Олимов, Шохимардон Исмоилов, Содикджон Абдуджалилов, Санжар Парпиев. Численные решения физических нелинейных задач о пространственных стержнях на основе модификации А.А. Самарского-И.В. Фрязинова. //AIP Conf. Proc. 3244, 020058 (2024) //https://doi.org/10.1063/5.0242253.
5. Шохимардон Исмоилов, Муродилла Олимов, Bekzodjon Yusufbekov, Sodiqjon Abdujalilov. Математическое моделирование процессов геометрически нелинейной деформации пространственно нагруженных стержней под воздействием температуры. // AIP Conf. Proc. 3244, 020072 (2024)// https://doi.org/10.1063/5.0242254.
6. Муродилла Олимов, Санжарбек Парпиев, Низомиддин Садритдинов. Определение распределения температуры в стержнях и пластинах методом конечных элементов. AIP Conf. Proc. 3147, 030002 (2024)// https://doi.org/10.1063/5.0210298.
7. Olimov, M., Ismoilov, Sh. M. (2017). Balkani sof egilishini elastiklik-plastiklik siga maxsus muvozanat tenglamasini qurish. Nauchnoe znanie sovremennosti , (6), 107-111.
8. Olimov, M., Ismoilov, S. (2018). Ko'ndalang egilishni hisobga olgan holda yuklangan novdalarning kuchlanish-deformatsiya holatini matematik modellashtirish. TATU axborotnomasi: Boshqaruv va kommunikatsiya texnologiyalari , 1 (1), 11-22.
9. Исмоилов Ш., Юсуфбеков Б., Нурмаматов Ж. Бинолар ва иншоотларнинг мустаҳкамлигини баҳолашда фазовий юкланган стерженларнинг деформацияланиш ҳолатини аниқлашнинг математик модели: бинолар ва иншоотларнинг мустаҳкамлигини баҳолашда фазовий юкланган стерженларнинг деформацияланиш ҳолатини аниқлашнинг математик модели. – 2023.