

TRANSPORT MASALASINING OPTIMAL YECHIMINI TOPISHDA POTENSIALLAR USULI.

Husanov Farrux Oltinboyevich

Samarqand iqtisodiyot va servis instituti

Oliy matematika kafedrası v.b. dotsenti

Samarqand iqtisodiyot va servis instituti

talabasi Sayfiddinov Bektosh Bektemir o'g'li

Samarqand iqtisodiyot va servis instituti

talabasi Raximberdiyev Tolibjon Tulqin o'g'li

Annotatsiya: ushbu maqolada matematika sohasidagi "transport masalasi" ning yechilishi haqida malumotga ega bo'lasiz. Shuningdek, bu masalani iqtisodiyotga bog'liqligini va iqtisodiy masalalarni yechishda foydalanilishi haqida ham bilib olasiz.

Kalit so'zlar: transport masalasi, optimallik, minimum qiymat, maximum qiymat, punkt, yuk, fuksiya, summa.

Abstract: in this article you will get information about the solution of the "transportation problem" in the field of mathematics. You will also learn how this issue is related to economics and how it is used to solve economic problems.

Key words: transport problem, optimality, minimum value, maximum value, point, load, function, sum.

Yuk zaxiralari a_1, a_2, \dots, a_m bo'lgan m ta jo'natish punkti, yukka bo'lgan talab b_1, b_2, \dots, b_n bo'lgan n ta qabul punktlari berilgan bo'lib, jo'natish punktlaridan qabul punktlariga birlik yukni tashish harajatlari c_{ij} , $i = 1 \dots m$; $j = 1 \dots, n$ bo'lsin. . Bu yerda i -jo'natish punkti nomeri, j - qabul punkti nomerini bildiradi. Umumiy yuk tashish xarajatlari quyidagi formula orqali beriladi:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Bu yerda x_{ij} nomerli jo'natish punktidan j nomerli qabul punktiga tashiladigan yuk hajmi. Yuk tashish harajatlarini iloji boricha kamaytirish uchun Z funktsiyaning minimumini hisoblaymiz:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \text{MIN} \quad (1)$$

Yuqoridagi masala jadval ko'rinishida quyidagicha ifodalanadi:

Qabul punktleri Jo'natish punktleri	1	2	...	n	Yuk zaxiralari
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	a_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	a_2
...
m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	a_m
Yukka bo'lgan talab	b_1	b_2	...	b_n	

Yuk tashishni shunday tashkil etish kerakki, jo'natish punktlaridagi barcha yuk olib chiqib ketilishi va qabul punktlaridagi yukka bo'lgan talab to'liq qondirilishi kerak. Bu talabni quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2$$

.....

$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m$$

(2)

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1$$

$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2$$

.....

$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n$$

(3)

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (4)$$

(4) munosabat bajarilsa, transport masalasi yopiq masala deyiladi va masalani yechishga kirishish mumkin. Agar (4) shart bajarilmasa, masala ochiq deyiladi. Ochiq masalani yechish uchun u yopiq masalagi keltiriladi. Masalan,

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

bo'lsin. Ushbu masalani yopiq masalagi keltirish uchun yukka bo'lgan talabi $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ bo'lgan qo'shimcha qabul punkti tuziladi. Ushbu punkt uchun birlik yukni tashish xarajatlarini 0 ga teng deb olamiz: $c_{1,n+1} = c_{2,n+1} = \dots = c_{m,n+1} = 0$. Natijada quyidagi yopiq masalani hosil qilamiz.

Qabul punktlari Jo'natish punktlari	1	2	...	n	n+1	Yuk zaxiralari
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	$x_{1,n+1}$	a_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	$x_{2,n+1}$	a_2
...
m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	$x_{m,n+1}$	a_m
Yukka bo'lgan talab	b_1	b_2	...	b_n	b_{n+1}	

Agar $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ bo'lsa, yuk zaxiralari $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ bo'lgan qo'shimcha jo'natish punkti tuziladi va yuqoridagi kabi yopiq masalagi keltiriladi.

Birinchi Transport masalasini yechish ikki bosqichda olib boriladi: 1) bosqichda (2)-(3) shartlarni qanoatlantiruvchi boshlang'ich $x_{ij}, i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ yechim topiladi. Boshlang'ich rejani topishning bir necha usullari bo'lib, ularga shimoliy-g'arb usuli, minimal element usuli va boshqalar kiradi. Shimoliy-g'arb usulida (1,1) katak tanlab olinib, $x_{11} = \min(a_1, b_1)$ deb olinadi. Agar $\min(a_1, b_1) = a_1$ bo'lsa, bu 1-jo'natish punktidagi barcha yuk 1-qabul punktiga yuborilishini, 1-jo'natish punktidan qolgan qabul punktlariga yuk yuborilmasligini bildiradi. Shuning uchun a_1 joylashgan satrdagi boshqa kataklarga minus qo'yiladi. 1-qabul punktidagi yukka bo'lgan talab $b_1^1 = a_1 - b_1$ bo'lib qoladi. Agar $\min(a_1, b_1) = b_1$ bo'lsa, 1-qabul punktidagi yukka bo'lgan talab to'liq qondirilganligini, 1-jo'natish punktida esa $a_1^1 = a_1 - b_1$ miqdor yuk qolganligini bildiradi. 1-qabul punktiga boshqa jo'natish punktlaridan yuk keltirilmaydi

Qabul punktlari Jo'natish punktlari	1	2	...	n	Yuk zaxiralari	
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	a_1	b_1^1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	a_2	
...	
m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	a_m	
Yukka bo'lgan talab	b_1	b_2	...	b_n		
	0					

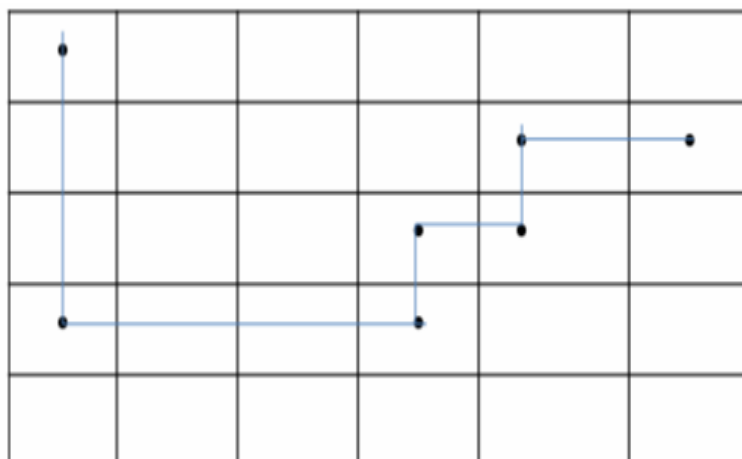
Xisoblashlarni 1-jadval bo'yicha davom ettirib, (2,1) katakka o'tamiz. $x_{21} = \min(a_1, b_1^1) = b_1^1$ o'lsin. Jadvalni yuqoridagi usul bilan to'ldirib, quyidagini hosil qilamiz.

Qabul punktlari Jo'natish punktlari	1	2	...	n	Yuk zaxiralari	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1	0
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2	a_2^1
...	
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m	
Yukka bo'lgan talab	b_1	b_2	...	b_n		
	b_1^1					

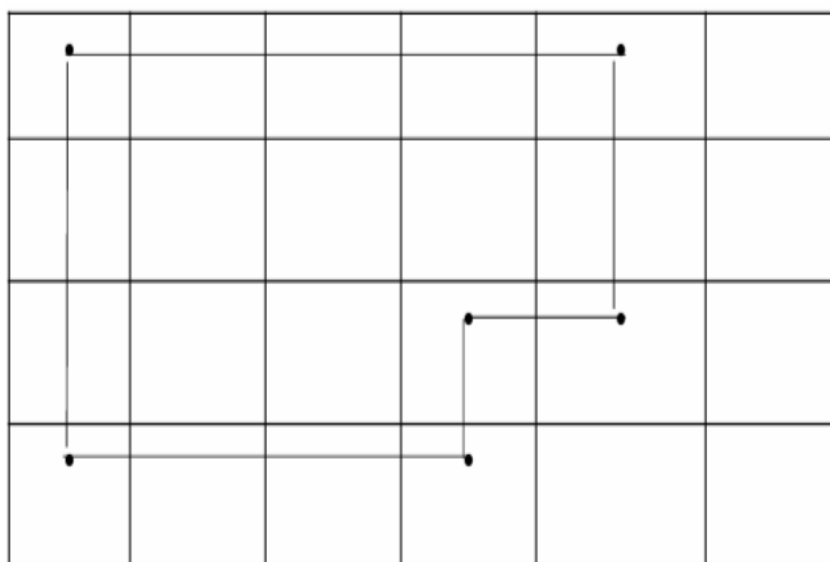
Shu tariqa hisoblashlarni jadvalning quyi o'ng bo'rchagigacha davom ettirib, jadvadagi barcha $x_{ij}, i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ larni aniqlaymiz. Bunda (2)-(3) shartlar bajarilishi kerak. Masalaning ikkinchi bosqichida boshlang'ich reja asosida (1) shartni qanoatlantiruvchi optimal yechim topiladi. Optimal yechimni topishning potentsiallar, taqsimot kabi bir necha usullari mavjud bo'lib, biz potentsiallar usulini qarab chiqamiz. Ushbu usulni qarashdan oldin hisoblash jarayonida tushunchalar bilan ishlatiladigan tanishamiz. ayrim Jadvaldagi ixtiyoriy nuqtalar to'plami nabor deyiladi.

•					
		•		•	•
			•		
	•				
					•

Naborni tashkil qiluvchi nuqtalar har bir qatorda ikkitadan oshib ketmasa, bunday nabor zanjir deyiladi.



Agar zanjir yopiq bo'lsa, u sikl deyiladi.



Agar jadvaldagi ta nuqtalar to'plami sikl tashkil qilmasa, ularga bitta nuqta qo'shish orqali sikl hosil qilsak, bunday ta nuqtalar to'plami atsiklik rejani tashkil qiladi deyiladi.

Agar transport masalasida $X_{ij} > 0$ bo'lsa, (i,j) katak belgilangan katak deyiladi. Agar transport masalasida barcha kataklar uchun $v_j - u_i \leq c_{ij}$ (5) shartni, belgilangan kataklar uchun esa $v_j - u_i = c_{ij}$ shartni qanoatlantiruvchi $v_j, j=1,2,\dots,n; u_i, i=1,2,\dots,m$ sonlari mavjud bo'lsa, $x_{ij}, i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ reja optimal bo'ladi $v_j, j=1,2,\dots,n; u_i, i=1,2,\dots,m$ sonlari esa potentsiallar deyiladi.

Transport masalasini potentsiallar usulida yechish quyidagi tartibda bajariladi: 1) Belgilangan kataklar uchun $v_j - u_i = c_{ij}, v_j = j=1,2,\dots,n; u_i = i=1,2,\dots,m$ shartni qanoatlantiruvchi tenglamalar sistemasi tuziladi. Bunda tenglamalar soni o'zgaruvchilar sonidan bitta kam bo'lgani uchun sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Sistemaning bitta xususiy yechimini topib, potentsiallarning qiymatini aniqlaymiz;

2) Belgilanmagan kataklar uchun $v_j - u_i \leq c_{ij}$ shartni tekshiramiz. Agar ushbu shart barcha kataklar uchun bajarilsa, optimal yechim topilgan hisoblanadi va $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ funktsiya qiymati hisoblanadi; 3) Agar $v_j - u_i \leq c_{ij}$ shart bir nechta kataklar uchun bajarilmasa, Ushbu kataklar uchun $\delta_i = v_i - u_i - c_{ij}$ ayirma hisoblanadi va $\delta_{i_0 j_0} = \max \delta_{ij}$ topiladi;

4) $(i_0 j_0)$ katak belgilangan kataklar qatoriga qo'shiladi va belgilangan kataklardan sikl tuziladi; 5) $(i_0 j_0)$ katakdan boshlab siklni tashkil qiluvchi kataklarga "-" va "+" ishoralari navbat bilan qo'yilib chiqiladi; ni 6) "-" ishorali kataklar uchun $\theta = \min(x_{ij})$ aniqlaymiz; 7) "-" ishorali kataklardan θ ni ayirib, "+" ishorali kataklarga θ ni qo'shamiz; 8) θ joylashgan katakni belgilangan kataklar qatoridan chiqazamiz. Natijada yangi planni hosil qilamiz va bu plan uchun (1)-(7) amallarni takrorlaymiz. Yuqoridagi hisoblashlar barcha kataklar uchun $v_j - u_i \leq c_{ij}$ shart bajarilib, optimal plan topilguncha davom ettiriladi. Quyidagi misolni qaraymiz: Transport masalasi quyidagi jadval ko'rinishida berilgan bo'lib, uni potentsiallar usuli bilan yechamiz.

Qabul punktlari	v_j	1	2	3	4	Yuk Zaxiralari
jo'natish punktlari	u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	
1	u_1	2	4	6	10	90
2	u_2	1	3	7	4	100
3	u_3	4	8	13	7	140
Yukka bo'lgan talab		110	100	80	40	330

Boshlang'ich planni tuzish uchun shimoli-g'arb usulidan foydalanamiz. (1,1) katakka mos zaxira va talabning kichigini $x_{11}=100$ deb olamiz.

Qabul punktlari	v_j	1	2	3	4	Yuk Zaxiralari	
		v_1	v_2	v_3	v_4		
jo'natish punktlari	u_i						
1	u_1	2 90	4	6	10	90	0
2	u_2	1	3	7	4	100	
3	u_3	4	8	13	7	140	
Yukka bo'lgan talab		110	100	80	40	330	
		20					

Yuqoridagi jadvalga ko'ra 1-jo'natish punktidan 1-qabul punktiga 90 birlik yuk yuboriladi, 1-jo'natish punktida boshqa yuk qolmaydi, shuning uchun 1-jo'natish punktidan boshqa qabul punktlariga yuk tashilmaydi, 1- qabul punktiga yana 30 birlik yuk keltirish kerak. (2,1) katakka o'tib, shu katakka mos talab va zaxiralarning kichigini $x_{21}=20$ deb olamiz.

Qabul punktlari	v_j	1	2	3	4	Yuk Zaxiralari	
		v_1	v_2	v_3	v_4		
jo'natish punktlari	u_i						
1	u_1	2 90	4	6	10	90	0
2	u_2	1	3	7	4	100	80
3	u_3	4	8	13	7	140	
Yukka bo'lgan talab		110	100	80	40	330	
		20					
		0					

(2,3) katakka o'tib, yuqoridagi qoida bo'yicha $x_{21}=80$ ni aniqlaymiz.

Qabul punktlari jo'natish punktlari	v_j	1	2	3	4	Yuk Zaxiralari	
	u_i	v_1	v_2	v_3	v_4		
1	u_1	2 90	4	6	10	90	0
2	u_2	1	3	7	4	100	
3	u_3	4	8	13	7	140	
Yukka bo'lgan talab		110	100	80	40	330	
		20	20				
		0					

Hisoblashlarni shu tariqa davom ettiramiz va oxirigi jadval quyidagi ko'rinishga keladi:

Qabul punktlari jo'natish punktlari	v_j	1	2	3	4	Yuk Zaxiralari		
	u_i	v_1	v_2	v_3	v_4			
1	u_1	2 90	4	6	10	90	0	
2	u_2	1	3	7	4	100	80	0
3 120	u_3	4	8	13	7	140		
Yukka bo'lgan talab		110	100	80	40	330		
		20	20					
		0	0					

Qabul punktlari jo'natish punktlari	v_j	1	2	3	4	Yuk Zaxiralari		
	u_i	v_1	v_2	v_3	v_4			
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0	
2	u_2 80	1 20	3 80	7 -	4 -	100		
3	u_3 120	4	8 20	13 80	7 40	140		40
Yukka bo'lgan talab		110	100	80	40	330		
		20	20	0	0			
		0	0					

Shu tariqa boshlang'ich planni hosil qildik: $x_{11}=90$
 $x_{21}=20$ $x_{22}=80$ $x_{32}=20$ $x_{33}=80$ $x_{34}=40$ $x_{12}=x_{13}=x_{14}=x_{23}=x_{24}=x_{31}=0$, $z = 90 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 80 \cdot 3 + 20 \cdot 8 + 80 \cdot 13 + 40 \cdot 7 = 180 + 20 + 240 + 160 + 1040 + 280 = 1920$. Masalaning optimal yechimini topish uchun oxirgi jadvalni quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

Qabul punktlari jo'natish punktlari	v_j	1	2	3	4	Yuk Zaxiralari
	u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100
3	u_3	4 -	8 20	13 80	7 40	140
Yukka bo'lgan talab		110	100	80	40	330

Belgilangan kataklar uchun $v_j - u_i = c_{ij}$, v_j , $j = 1, 2, 3, 4$; u_i , $i = 1, 2, 3$ shart bo'yicha tenglamalar sistemasini tuzamiz: $v_1 - u_1 = 2$; $v_1 - u_2 = 1$; $v_2 - u_2 = 3$; $v_2 - u_3 = 8$; $v_3 - u_3 = 13$; $v_4 - u_3 = 7$; Tenglamalar sistemasidagi noma'lumlar 7 ta, tenglamalar esa 6 ta

bo'lgani uchun sistema cheksiz ko'p yechimga ega. Xususiy yechimni topish uchun o'zgaruvchilardan biriga ixtiyoriy qiymat beramiz, masalan $u_1 = 0$ bo'lsin. U holda $v_1 = 2$, $u_2 = 1$, $v_2 = 4$, $u_3 = -4$, $v_3 = 9$, $v_4 = 3$ kelib chiqadi. Potentsiallarning qiymatlarini jadvalga qo'yamiz:

Qabul punktlari jo'natish punktlari	v_j	1	2	3	4	Yuk Zaxiralari
	u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	
1	u_1	2 90	4	6	10	90
2	u_2	1 20	3 80	7	4	100
3	u_3	4	8 20	13 80	7 40	140
Yukka bo'lgan talab		110	100	80	40	330

Belgilanmagan kataklar uchun $v_j - u_i \leq c_{ij}$ shartni tekshiramiz:

$$v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = c_{12}; v_3 - u_1 = 9 - 0 = 9 > 6 = c_{13}$$

$$v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}; v_3 - u_2 = 9 - 1 = 8 > 7 = c_{12}$$

$$v_4 - u_2 = 3 - 1 = 2 < 4 = c_{24}; v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}$$

Uchta (1,3), (2,3), (3,1) kataklar uchun $v_j - u_i \leq c_{ij}$ shart bajarilmaydi. Ushbu kataklar uchun $\delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ larni hisoblaymiz:

$$\delta_{13} = v_3 - u_1 - c_{13} = 9 - 6 = 3;$$

$$\delta_{23} = v_3 - u_2 - c_{23} = 8 - 7 = 1;$$

$$\delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 6 - 4 = 2;$$

δ larning eng kattasini topamiz. Bu $\delta_{13} = 3$ bo'lib, unga mos katakni belgilangan kataklar qatoriga qo'shib, belgilangan kataklar yordamida sikl tuzamiz. Siklni tashkil etuvchi kataklarga (1,3) katakdan boshlab '+' va '-' ishoralarini navbat bilan qo'yib chiqamiz:

Qabul punktla ri	jo'natis h punktla ri	v_j	1	2	3	4	Yuk Zaxirala ri
		u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	
1	u_1	2	4	6	10	90	
		90	-	-	-	-	
2	u_2	1	3	7	4	100	
		20	80	-	-	-	
3	u_3	4	8	13	7	140	
		-	20	80	40	-	
Yukka bo'lga n talab		110	100	80	40	330	

'-' ishorali kataklar uchun $\theta = \min x_{ij} = \min 90, 80, 80$ ni topamiz. Ushbu shartni qanoatlantiruvchi kataklar ikkita (2,2) va (3,3) kataklari bo'lib, ulardan birini, masalan (3,3) katakni tanlaymiz. '-' ishorali kataklar uchun $\theta = \min x_{ij} = \min 90, 80, 80$ ni topamiz. Ushbu shartni qanoatlantiruvchi kataklar ikkita (2,2) va (3,3) kataklari bo'lib, ulardan birini, masalan (3,3) katakni tanlaymiz. θ ni $\diamond + \diamond$ ishorali kataklarga qo'shib, '-' ishorali kataklardan ayiramiz va θ joylashgan (3,3) katakni belgilangan kataklar qatoridan chiqarib tashlaymiz. Natijada quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

Qabul punktla ri	jo'natis h punktla ri	v_j	1	2	3	4	Yuk Zaxirala ri
		u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	
1	u_1	2	4	6	10	90	
		90					
2	u_2	1	3	7	4	100	
		20	80				
3	u_3	4	8	13	7	140	
			20	80	40		

Yukka bo'lgan talab		110	100	80	40	330
---------------------	--	-----	-----	----	----	------------

Hosil bo'lgan yangi planda belgilangan kataklar uchun $v_i - u_i = c_{ij}$ shart orqali yuqoridagi usul bilan tenglamalar sistemasi tuzib $u_1 = 0$ dep olib, qolgan patensiallarni aniqlaymiz. $v_1 - u_1 = 2, v_3 - u_1 = 6, v_1 - u_2 = 1, v_2 - u_3 = 8, v_4 - u_3 = 7$.

$v_j \backslash u_i$	V1=2	V2=4	V3=6	V4=3	Zaxira
U1=0	2 10	4	6 80	10	90
U2=1	1 100	3 0	7	4	100
U3=4	4	8 100	13	7 40	140
talab	110	100	80	40	

Belgilangan kataklar uchun $v_j - u_i \leq c_{ij}$ optimallik shartini tekshiramiz. Bu shart (3,1) katakda o'zini qanotlantirmagani uchun shu katakni belgilangan kataklar qatoriga qo'shib yuqoridagi usul bilan sikl hosil qilamiz. Siklni ishoralab '-' ishorali kataklar uchun θ ni anqilaymiz '+' ishorali kataklarda bir xil 100 bo'lganligi uchun ulardan birini masalan (3,2) katakni tanlaymiz. Natijada quyidagi katakni hosil qilamiz.

$v_j \backslash u_i$	V1=2	V2=4	V3=6	V4=3	Zaxira
U1=0	2 10	4	6 80	10	90
U2=1	1 100	3 0	7	4	100
U3=4	4	8 100	13	7 40	140
talab	110	100	80	40	

θ ni '-' ishoralali kataklardan ayirib '+' ishorali kataklarga qo'shamiz. (3,2) katakni belgilangan kataklar qatoridan chiqarib tashlab, yangi reja uchun patensiallarni yuqoridagi usul bilan aniqlaymiz. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

$v_j \backslash u_i$	V1=2	V2=4	V3=6	V4=3	Zaxira
U1=0	2 10	4	6 80	10	90
U2=1	1 0	3 100	7	4	100
U3=4	4 100	8	13	7 40	140

talab	110	100	80	40	
-------	-----	-----	----	----	--

Yuqoridagi jadvaldagi rejada barcha kataklar uchun $v_j - u_i \leq c_{ij}$ patentsiallik sharti bajariladi. Demak, demak masalaning optimal yechimi topildi va u quyidagicha bo'ladi:
 $x_{11}=10, x_{13}=80, x_{22}=100, x_{31}=100, x_{34}=40, x_{12}=x_{14}=x_{21}=x_{23}=x_{24}=x_{33}=0,$
 $z=10*2+80*6+100*3+100*4+40*7=20+480+300+400+280=1480.$ Shuning bilan transport masalasini yechish jarayoni yakunlanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. A. Schrijver (2012), "On the History of the Transportation and Maximum Flow Problems", Documenta Mathematica, Extra Volume ISMP (2012) 169–180.
2. Hamdy A.Taha."Operations Research: An Introduction",Prentice Hall, 7 editions 5, USA,2006.
3. Husanov F.O. "Transport masalasi" International journal of scientific researchers. VOLUME 5, ISSUE 1, 2024