

**МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ
ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ,
МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ**

Эшимова Феруза Кенжабоевна

Негосударственный университет экономики и педагогики, Самаркандский
кампус

Аннотация: В данной работе изучаются методологические основы применения определённого интеграла к задачам геометрии, механики и физики.

Ключевые слова: Интегрирование, площадь, объём, момент инерции, масса, производный, вычисление.

**METHODOLOGICAL BASIS OF THE APPLICATION
OF THE DEFINITE INTEGRAL TO THE PROBLEMS OF GEOMETRY,
MECHANICS AND PHYSICS**

Eshimova Feruza Kenjaboyevna

Non-State University of Economics and Pedagogy, Samarkand Campus,

Abstract: This work explores the methodological foundations of applying the definite integral to problems in geometry, mechanics, and physics.

Keywords: Integration, area, volume, moment of inertia, mass, derivative, calculation.

Интеграл (от латинского Integer-целый) – одно из важнейших понятий математики, возникшее в связи с потребностью, с одной стороны отыскивать функции по их производным (например, находить функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой, по скорости этой точки), а другой – измерять площади, объёмы, длины дуг, работу сил за определённый промежуток времени и т.п.

Возникновение задач интегрального исчисления связано с нахождением площадей и объёмов. Ряд задач такого рода был решен математиками древней Греции. Большую роль при решении таких задач играл исчерпывающий метод,

созданный Евдоксом Книдским (о к. 408—о к. 355 до н. э) и широко применявшийся Архимедом (о к. 287 – 212 до н.э.).

Математики XVII столетия, получившие многие новые результаты, учились на трудах Архимеда. Активно применялся и другой метод – метод неделимых, который также зародился в древней Греции. Например, криволинейную трапецию они представляли себе составленной из вертикальных отрезков длиной $f(x)$, которым тем не менее, приписывали площадь, равную бесконечно малой величине $f(x)dx$. В соответствие с таким пониманием искомая площадь считалось равной сумме бесконечно большого числа бесконечно малых площадей.

В XVII веке были сделаны многие открытия, относящиеся к интегральному исчислению. Так П. Ферма уже в 1629 году решил задачу квадратуры любой кривой, и на этой основе решил ряд задач на нахождение центров тяжести. И. Кеплер при выводе своих знаменитых законов движения планет фактически опирался на идею приближенного интегрирования. И. Барроу (1603 - 1677), учитель Ньютона, близко подошел к пониманию связи интегрирования и дифференцирования.

Методы математического анализа активно развивались в следующем столетии и при этом в первую очередь следует назвать имена Л. Эйлера, завершившего систематическое исследование интегрирования элементарных функций, и И. Бернулли.

Опишем идею сведения задач геометрии, механики и физики к вычислению определённых интегралов. Нам известны многие формулы геометрии, механики и физики в случаях, когда объекты геометрии имеют простую форму или когда законы физики устанавливаются при постоянстве параметров рассматриваемых процессов (постоянная скорость, постоянные длины сторон, постоянное давление и т.д.). Например, если сила постоянно, то её работу можем вычислить, если путь идёт по отрезку прямой, но если силовое поле переменное или же путь идёт по кривой линии, то как найти работу? Идея

же применения интеграла к таким задачам следующая. Пусть Q – искомая величина, зависящая от переменной x , которая изменяется в пределах некоторого отрезка $[a, b]$. Пусть P – некоторый закон разбиения этого отрезка на малые отрезки точками:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

и в пределах каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, с длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вычисляем соответствующего этому отрезку часть ΔQ_i величины Q_i , считая параметры задач постоянными и пусть существуют

$M_i = \max_i \Delta Q_i$ и $m_i = \min_i \Delta Q_i$ значения искомой величины ΔQ_i такие что $M_i - m_i = o(\Delta x_i)$ при $\Delta x_i \rightarrow 0$. Далее, пусть существует интегрируемая на $[a, b]$ функция $q(x)$, такая, что, при любом выборе значения ΔQ_i между m_i и M_i его можно представить в виде

$$\Delta Q_i = q(x_i) \Delta x_i + o(\Delta x_i), \quad \Delta x_i \rightarrow 0, \quad (1)$$

где $o(\Delta x_i)$ – бесконечно малая (б. м.) величина более высокого порядка по сравнению с $\Delta x_i \rightarrow 0$, другой запись этого равносильно соотношению $o(\Delta x_i) = o(1) \Delta x_i$, где через $o(1)$ обозначается бесконечно малая функция (при $\Delta x_i \rightarrow 0$) в смысле её общего определения.

Тогда принимаем, что все

$$Q \approx \sum_{i=1}^n q(x_i) \Delta x_i$$

причём, чем мельче разбиение P , тем больше это приближение считаем более точным. Значит, найденное приближенное значение Q есть интегральная сумма для функции $q(x)$, и поэтому естественно определить Q как предел суммы

$$\sum_{i=1}^n q(x_i) \Delta x_i$$

при $\lambda(P) = \max |\Delta x_i| \rightarrow 0$ т. е.

$$Q = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n q(x_i) \Delta x_i = \int_a^b q(x) dx \quad (2)$$

У формулы (2) двойная роль: во-первых, она даёт определение искомой величины Q , во-вторых, она даёт способ вычисления этой величины.

С помощью методов математического анализа в значительной степени упрощаются решения многих задач геометрии, механики и физики и т. п.

В целях более явного подчеркивания роли математического аппарата при решении физических задач целесообразно придерживаться следующей методической схемы:

- 1) перевести физическую задачу на язык математики;
- 2) решить математическую задачу;
- 3) перевести ответ математической задачи на язык физики;
- 4) конкретизировать физический смысл ответа задачи.

Н. И. Лобачевский говорил: “Нет ни одной области математики, как бы абстрактна она не была, которая когда ни будь не окажется применимой к явлениям действительного мира”. Значит здесь должно решаться важная методическая проблема сближения методов обучения решению учебных задач с методами, применяемыми на практике: необходимо раскрыть особенности прикладной математики, её воспитательные функции; усилить межпредметные связи.

Важно применять практико-ориентированный подход, начиная с первого курса: ведь именно в начале обучения закладываются основы профессии. Поэтому, изучая тему “Применение определённого интеграла”, студенты составляют таблицы, где отражено применение определённого интеграла как в математике, так и в физике и т. п.

$\int_a^b f(x) dx$	
Применение в математике	Применение в физике и механике

1. Вычисление площади криволинейной трапеции;	1. Вычисление работы переменной силы;
2. Вычисление площади тела вращения;	2. Вычисление перемещения;
3. Вычисление длины дуги кривой;	3. Вычисление массы;
4. Вычисление объёма тела;	4. Вычисление статистического момента материальной кривой;
5. Вычисление объёма тела вращения и т. д.	5. Вычисление момента инерции линии, круга, цилиндра;
	6. Вычисление координат центра тяжести линии;
	7. Вычисление количество теплоты и т. д.

На основе стандарта рассматриваются задачи прикладного характера, которые в нем применяется определенный интеграл:

- 1) Вычислите массу участка стержня от точки $x_1 = 1$ до точки $x_2 = 3$, если его линейная плотность задается формулой $p(x) = 2x^2 - 7x + 1$;
- 2) Вычислите количество электричества, протёкшего по проводнику за промежуток времени $[2, 4]$, если сила тока задаётся формулой $I(t) = 5t^2 + 7t - 8$;
- 3) Вычислите работу по переносу единичной массы, совершенную силой $F(x) = 6x^2 + 3x - 4$ ж
- 4) Автомобиль вытаскивает автомобиль. Определить, какая работа совершается при этом на пути движения 8м, а приложенная сила равна 11500 Н.

Перед преподавателем математики стоит нелегкая задача – преодолеть в сознании студентов представление о «сухости», формальном характере, оторванности этой науки от жизни и практики. Работать над реализацией прикладной направленности обучения нужно очень серьёзно, ведь она влечёт за собой развитие познавательной активности студентов.

В новых социально – экономических условиях значительно возросли требования к профессиональной компетентности, гибкости, способности к

творчеству будущих специалистов высшего и среднего специального образования.

При современном уровне технологий и развития науки применение математических инструментов, как определённый интеграл, становится, всё более актуальным как в учебном процессе, так и в научных исследованиях и инженерных разработках.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alimov Sh., Ashurov R. Matematik analiz. I, II, III qismlar, darslik,
2. Toshkent: "Mumtoz so`z", 2018.
3. Байденко В. И. Образовательный стандарт. Опыт системного исследования – Н. Новгород. НовГУ. 1999 г.
4. Федорец Г. Ф. Межпредметные связи процесса обучения – М. Нар. Образование. 1985 г.
5. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ 1, 2. М. Издательство МГУ. 1987 г.
6. Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач математическому анализу. Т 1, 2, 3, М. "Наука". 1984 г, 1986 г.