

*Баймухамедова А. Б.  
Студентка БХА-04-24г  
Ташкентского Государственного Экономического Университета*

*Нуралиева Р. А.  
Студентка БХА-04-24г  
Ташкентского Государственного Экономического Университета*

*Пошаходжаева Г. Д.  
Доцент, Ташкентского Государственного Экономического  
Университета  
Узбекистан, Ташкент*

## **ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭКОНОМИКЕ**

**Аннотация:** Работа посвящена применению матричной алгебры в экономике. Рассматривается модель межотраслевого баланса, описывающая потоки продукции между различными отраслями. Приведены методы расчёта технологических коэффициентов и их представление в виде матрицы техники производства. Рассматривается использование обратной матрицы для вычисления необходимых объёмов производства в зависимости от конечного спроса. Приведены примеры практического применения матричных вычислений в экономическом планировании, анализе затрат и распределении ресурсов. Статья подчёркивает важность матриц в моделировании экономических процессов и принятии управленческих решений.

**Ключевые слова:** матрица, обратная матрица, межотраслевой баланс, технологические коэффициенты, матрица техники производства,

матричное уравнение, коэффициенты совокупного потребления, экономическое планирование, анализ затрат, распределение ресурсов.

***Baimukhamedova A.B.***

***Student BHA-04-24r***

***Tashkent State University of Economics***

***Nuralieva R.A.***

***Student BHA-04-24r***

***Tashkent State University of Economics***

***Poshakhodjaeva G.D.***

***Associate Professor, Tashkent State University of Economics***

***Uzbekistan, Tashkent***

## **APPLICATION OF MATRIX ALGEBRA IN ECONOMICS**

*Abstract: The work is devoted to the application of matrix algebra in economics. The model of inter-industry balance describing the flows of products between different industries is considered. Methods for calculating technological coefficients and their presentation in the form of a matrix of production technology are given. The use of the inverse matrix for calculating the required production volumes depending on final demand is considered. Examples of practical application of matrix calculations in economic planning, cost analysis and resource allocation are given. The article emphasizes the importance of matrices in modeling economic processes and making management decisions.*

*Keywords: matrix, inverse matrix, inter-industry balance, technological coefficients, production technology matrix, matrix equation, aggregate consumption coefficients, economic planning, cost analysis, resource allocation.*

Допустим, что материальное производство делится на  $n$  отраслей; обозначим через  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  плановый объем продукции, произведенной в единицу времени (например, за год), в натуральном выражении. Продукция каждой отрасли частично предназначена на производственное потребление других отраслей, частично перерабатывается внутри отрасли. Обозначим через  $q_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) количество продукции  $i$ -й отрасли, израсходованное на производственные нужды  $j$ -й отрасли, а через  $q_{ii}$  — количество продукции  $i$ -й отрасли, потребленное в той же самой отрасли ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Как правило, только часть продукции  $i$  — й отрасли потребляется в материальном производстве. Часть этой продукции расходуется на цели, не связанные с текущими производственными нуждами, например на потребление, экспорт, капитальные вложения, увеличение запасов. Продукция  $i$  — й отрасли, не предназначенная на текущее производственное потребление, называется *конечным продуктом*  $i$  — й отрасли; обозначим его

$q_i$ .

Распределение продукции каждой отрасли можно описать с помощью следующей таблицы, называемой *таблицей межотраслевых связей*.

| Отрасль<br>материальног<br>о<br>производства | Объем<br>продукции | Межотраслевые потоки<br>в отрасли |          |     |  | Конечный<br>продукт |
|----------------------------------------------|--------------------|-----------------------------------|----------|-----|--|---------------------|
|                                              |                    | 1                                 | 2        | ... |  |                     |
| 1                                            | $Q_1$              | $q_{11}$<br>$q_{1n}$              | $q_{12}$ | ... |  | $q_1$               |
| 2                                            | $Q_2$              | $q_{21}$                          | $q_{22}$ | ... |  | $q_2$               |

|         |         |          |         |          |  |         |
|---------|---------|----------|---------|----------|--|---------|
|         |         | $q_{2n}$ |         |          |  |         |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$  |         | $\dots$  |  | $\dots$ |
|         |         |          | $\dots$ |          |  |         |
| $n$     | $Q_n$   | $q_{n1}$ |         | $q_{n2}$ |  | $q_n$   |
|         |         | $q_{nn}$ |         |          |  |         |

В таблице межотраслевых связей можно суммировать только элементы отдельных строк. Элементы столбцов суммировать нельзя, ибо они относятся к продукции разных отраслей, выражаемой в неодинаковых единицах измерения. Можно записать  $n$  следующих уравнений:

|         |            |                    |            |       |
|---------|------------|--------------------|------------|-------|
| $Q_1 =$ | $q_{11} +$ | $q_{12} + \dots +$ | $q_{1n} +$ | $q_1$ |
| $Q_2 =$ | $q_{21} +$ | $q_{22} + \dots +$ | $q_{2n} +$ | $q_2$ |
| ...     | ...        | ...                | ...        | (1)   |
| $Q_n =$ | $q_{n1} +$ | $q_{n2} + \dots +$ | $q_{nn} +$ | ...   |
|         |            |                    |            | $q_n$ |

Эти уравнения называются *балансовыми уравнениями производства*; они показывают, что объем продукции данной отрасли равняется сумме протоков продукции этой отрасли в другие отрасли, продукции, потребляемой в данной отрасли, и конечного продукта данной отрасли.

Производство определенного количества данного продукта при существующем уровне техники требует расходования разных предметов труда. Если для производства  $Q_j$  единиц продукта  $j$  – й отрасли необходимо израсходовать  $q_{ij}$  единиц продукции  $i$  – й отрасли, то на единицу продукта  $j$  – й отрасли потребуется израсходовать

$$a_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

единиц продукта  $i$  – й отрасли. Величина  $a_{ij}$  называется *технологическим коэффициентом производства*; он определяет количество единиц продукта  $i$  – й отрасли, необходимое для производства продукта  $j$  – й отрасли.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Пусть матрица техники производства в плановом периоде дана в виде матрицы (3). Из матрицы (2) следует, что:

Следовательно, балансовые уравнения (1) можно записать так:

или в матричной форме:

Введя обозначения:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_1 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix} = Q, \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} = q,$$

$$Q = AQ + q, \text{ или } Q - AQ = q, \text{ откуда}$$

Умножим полученное уравнение на  $(I - A)^{-1}$  левосторонне; имеем:

$$(I - A)^{-1}(I - A)Q = (I - A)^{-1}q, \text{ откуда}$$

$$Q = (I - A)^{-1}q. \quad (6)$$

Потребности общества удовлетворяет конечный общественный продукт (сумма конечных продуктов отраслей); в связи с этим планирование материального производства начинается с определения размеров и структуры конечного общественного продукта. Решение (6) матричного уравнения (5) позволяет определить плановый объем производства отдельных продуктов таким образом, чтобы получить необходимые количества конечных продуктов, предназначенных на потребление, запасы и т.п. Выражение (6) позволяет быстро разработать разные варианты плана материального производства в соответствии с вариантами заданного конечного общественного продукта.

Введем обозначение:

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Из уравнений (6) следует, что

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}; \quad (7)$$

Умножив, имеем:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \dots + A_{1n}q_n \\ A_{21}q_1 + A_{22}q_2 + \dots + A_{2n}q_n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_{n1}q_1 + A_{n2}q_2 + \dots + A_{nn}q_n \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{array}{l} Q_1 = \\ Q \\ 2 = \end{array} \begin{array}{l} A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \dots + A_{1n}q_n, \\ A_{21}q_1 + A_{22}q_2 + \dots + A_{2n}q_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \quad (8)$$

$$\dots \quad A_{n1}q_1 + A_{n2}q_2 + \dots \dots \dots$$

$$Q_n = \dots \dots \dots + A_{nn}q_n.$$

Уравнение (8) показывает, что элементы матрицы  $(I - A)^{-1}$  есть величины, определяющие количественные соотношения между конечными продуктами всех отраслей и продуктами каждой отрасли.

Элементы матрицы  $(I - A)^{-1}$  имеют определенное экономическое содержание. Возьмем, например, конечный продукт  $k$ -й отрасли

( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Если предположить, что изменяется только конечный продукт этой отрасли, а остальные конечные продукты не подлежат изменению, то каждое из уравнений (8) описывает линейную зависимость продукции каждой отрасли от величины конечного продукта  $k$ -й отрасли. В этом случае

отношение приращения\* зависимой переменной к приращению независимой переменной есть постоянная, равная коэффициенту при независимой переменной (см. гл. 9, §1). Следовательно,

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta q_k} = A_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Из матрицы (8) следует, что  $A_{ik}$  определяет количество единиц продукта  $i$ -й отрасли, необходимое для увеличения конечного продукта  $k$ -й отрасли на единицу. Коэффициенты  $A_{ik}$  называются *коэффициентами совокупного потребления*, а матрица  $(I - A)^{-1}$  – *матрицей коэффициентов совокупного потребления*. Эти коэффициенты играют весьма важную роль в планировании производства. Зная матрицу  $(I - A)^{-1}$ , мы можем определить разные варианты плана материального производства, соответствующие определенным вариантам конечного продукта.

**Пример 1.** Производство разделено на 3 отрасли; дана следующая матрица техники производства:

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

На предварительном этапе разработки плана принимаются два варианта потребности в конечном продукте:

$$1^\circ q_1^{(1)} = 200\,000, q_2^{(1)} = 400\,000, q_3^{(1)} = 300\,000;$$

$$2^\circ q_1^{(2)} = 300\,000, q_2^{(2)} = 400\,000, q_3^{(2)} = 200\,000.$$

Следует определить соответствующие варианты производственного плана. Матрица коэффициентов совокупного потребления есть матрица

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2,30769 & 0,87179 & 0,61538 \\ 1,53846 & 2,35897 & 1,07692 \\ 0,76923 & 0,51282 & 1,53846 \end{bmatrix}$$

Для первого варианта имеем:

$$\begin{bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ Q_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,30769 & 0,87179 & 0,61538 \\ 1,53846 & 2,35897 & 1,07692 \\ 0,76923 & 0,51282 & 1,53846 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 200\,000 \\ 400\,000 \\ 300\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 994\,868 \\ 1\,574\,356 \\ 820\,512 \end{bmatrix}$$

,

откуда

$$Q_1^{(1)} = 994\,868, Q_2^{(1)} = 1\,574\,356, Q_3^{(1)} = 820\,512; \text{ для}$$

второго варианта имеем:

$$\begin{bmatrix} Q_1^{(2)} \\ Q_2^{(2)} \\ Q_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,30769 & 0,87179 & 0,61538 \\ 1,53846 & 2,35897 & 1,07692 \\ 0,76923 & 0,51282 & 1,53846 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 300\,000 \\ 400\,000 \\ 200\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,164\,099 \\ 1\,620\,510 \\ 743\,589 \end{bmatrix}$$

,

откуда

$$Q_1^{(2)} = 1\,164\,099, Q_2^{(2)} = 1\,620\,510, Q_3^{(2)} = 743\,589.$$

Основываясь на равенстве  $q_{ij} = a_{ij}a_j$ , можно определить размеры межотраслевых потоков и оба их варианта.

**Пример 2. Таблица 1.** Использование ресурсов в различных сферах экономики

| Ресурсы          | Экономическая сфера |                         |       |
|------------------|---------------------|-------------------------|-------|
|                  | Промышленность      | Аграрная промышленность | Рынок |
| Трудовые ресурсы | 5,4                 | 6,1                     | 4,7   |
| Водные ресурсы   | 1,7                 | 2,3                     | 5,2   |
| Электро-энергия  | 5,8                 | 3,6                     | 4     |

Эту таблицу можно записать и охарактеризовать в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 5,4 & 6,1 & 4,7 \\ 1,7 & 2,3 & 5,2 \\ 5,8 & 3,6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Так, наглядно видно в таблице что, элемент матрицы  $a_{22}=2,1$  показывает, сколько водных ресурсов потребляет аграрная промышленность во всех сферах экономики, а следующий элемент матрицы  $a_{13}=6,7$  демонстрирует, сколько трудовых ресурсов потребляет рынок в целом.

Наглядным примером также может нам послужить следующая задача:

Некая фирма производит различную продукцию  $C_1, C_2, C_3$  и на изготовку этого продукта используется материал  $K_1, K_2$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix},$$

где элемент  $a_{ij}$  показывает сколько сырья  $j$ -того типа может быть потрачено внутри организации на производство продукции  $i$ -того типа. Цена каждого вида сырья равна:

$$C = \begin{pmatrix} 70 \\ 50 \end{pmatrix},$$

а планирование выпуска продукции равно  $B = (110 \ 150 \ 70)$ .

Из этого следует как, мы получим: расходы на материал

$$K_1 = 2*110+5*150+8*70=1530,$$

а цена другого материала

$$K_2 = 5*110+3*150+7*70=1490.$$

Таким образом, суммарная цена материала  $P = 1530*70+1490*50=181600$  может быть представлена в виде вектора:

$$P = B*Z = (110 \ 150 \ 70) * \begin{pmatrix} 390 \\ 500 \\ 910 \end{pmatrix} = 181600.$$

Идентичность всех выше перечисленных результатов (181600) была получена благодаря правильному выполнению семантического закона умножения векторов:  $(BA)C = B(AC)$ . Этот закон ярко иллюстрирует пример такого, что решая через любой вид решения матриц можно добиться одинаковости всех результатов.

**Пример 3. Таблица 2.** В таблице 2 проиллюстрированы сведения о работе 5 различных фирм, которые выпускают 4 вида товара с потреблением 3-х видов сырья, так же количество времени работы абсолютно каждой фирмы в году и стоимости всех видов материала.

| Вид<br>продукции № | Производство фирм                        |    |   | Стоимость<br>материалов<br>продукции |   |   |
|--------------------|------------------------------------------|----|---|--------------------------------------|---|---|
|                    | 1                                        | 2  | 3 | 1                                    | 2 | 3 |
| 1                  | 7                                        | 8  | 6 | 4                                    | 6 | 7 |
| 2                  | 3                                        | 5  | 7 | 5                                    | 8 | 9 |
| 3                  | 11                                       | 18 | 3 | 6                                    | 7 | 8 |
|                    | Количество полных<br>рабочих дней в году |    |   | Стоимость разных<br>видов материала  |   |   |
|                    | 1                                        | 2  | 3 | 1                                    | 2 | 3 |

|  |     |    |     |    |    |    |
|--|-----|----|-----|----|----|----|
|  | 230 | 18 | 200 | 70 | 80 | 90 |
|  | 0   |    |     |    |    |    |

Следовательно, должны понять:

- 1) Эффективность и плодотворность всех фирм по каждому виду продукции.
- 2) Нужда всех фирм по каждому виду материала.
- 3) Совокупность кредитования фирм для закупки и переработки материалов, которые необходимо для выпуска продукции указанных видов и количеств фирм.

Выстроим матрицу производства фирм по всем типам продукции:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 11 & 18 & 3 \end{pmatrix}.$$

Столбец вектора полностью соответствует производству по каждому типу изделия. Так годовое производство  $i$ -ой фирмы по каждому виду продукции можно произвести за счет произведения  $i$ -го столбца вектора  $C$  на количество рабочих дней в году именно для фирмы ( $i = 1, 2, 3$ ). Поэтому, годовое производство каждой фирмы по каждой продукции можно выразить с помощью вектора:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1470 & 1280 & 1260 \\ 1260 & 1280 & 1260 \\ 2310 & 2880 & 540 \end{pmatrix}.$$

Матрица затрат материалов на единицу продукции представлена как:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Все издержки по видам материала на фирмах можно полностью расписать

как  $D \cdot C$ :

$$DC = \begin{pmatrix} 109 & 165 & 77 \\ 143 & 214 & 113 \\ 164 & 245 & 129 \end{pmatrix}.$$

где  $j$ -я строка соответствует номеру типа материала, а  $i$ -й столбец – номеру фирмы согласно таблице ( $j = 1, 2, 3; i = 1, 2, 3$ ).

Ответ на второй вопрос, который был поставлен в задаче, можно получить таким же образом, что в первом, аналогично произвести произведение столбцов вектора  $DC$  нужда фирмы во всех типах материала:

$$DC_1 = \begin{pmatrix} 26040 & 28800 & 14580 \\ 35070 & 3080 & 21420 \\ 40110 & 43520 & 24480 \end{pmatrix}.$$

Введем вектор цены материала:  $Q = (70, 80, 90)$

Тогда цену годового запаса материала для каждой фирмы можно получить произведя операцию над матрицами, а точнее умножением матриц, следовательно, вектора  $Q$  на матрицу  $DCI$ :

$$P = QDS_1 = (8238300 \quad 8979200 \quad 4937400).$$

Хочется сказать о том, что, суммы кредитования фирм для закупки материала определяются путем аналогии всех компонентов вектора  $P$ .

Подводя итоги вышесказанному можно сказать о том, что в современной математике и экономике матрицы играют важную роль и являются неотъемлемой частью ее. Активно могут быть использованы в различных теориях, в экономике, менеджменте и многих других разделах естествознания и наукзнания, не говоря уже о применении матриц в разных направлениях учебной деятельности.

Мы смогли выявить лишь один недостаток, Он заключается в том, что по матрицам крайне сложно, даже практически невозможно определить победителя в каких-то сферах деятельности.

Также хочется отметить ряд огромных плюсов и достоинств матриц : Во-первых, они позволяют форме записывать на простом и доступным языком различные экономические процессы и закономерности в различных организациях и не только ,во-вторых, благодаря им решаются самые сложные задачи, которые могут показаться почти невыполнимыми, что является наиболее значимым для экономистов. В-третьих, с помощью матриц можно за короткий промежуток времени, сил и труда полностью проанализировать и решить множество задач. И можно сказать о том, что при присутствии каких-либо отрицательных факторов применения матричной алгебры положительные моменты превосходят в несколько раз.

#### **Список использованной литературы:**

1. Ашманов.С.А. "Линейное программирование" (1981)
2. Палий И.А. “Линейное программирование” (2008)
3. Бахтин В.И., Иванишко И.А. "Линейное программирование”
4. Крыньский Х.Э. “Математика для экономистов" (1970)
5. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. “Задачи и методы линейного программирования”