

**XUSUSIY XOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI
INTEGRALLASH VA ULARNI BELGILASH
METHODS FOR INTEGRATING AND CLASSIFYING PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PARTICULAR SOLUTIONS**

Haydarov To'lg'in Turg'unbayevich

Katta o'qituvchi. Jizzax politexnika instituti.

Хайдаров Толкин Тургунбаевич

Старший преподаватель. Джизакский политехнический институт.

Khaidarov Tulkin Turgunbaevich

Senior teacher. Jizzakh Polytechnic Institute.

Annotatsiya: Ushbu maqolada Differensial tenglamalarning tabiatda qo'llanilishini o'rganish, Xususiy xosilali differensial tenglamalarni integrallash usullari haqida so'z boradi.

Kalit so'zlar: Differensial tenglamalar, Furiye metodi, Chegaraviy shart, asimptotik metod, asimptotik xossa.

Аннотация: В данной статье рассматривается изучение применения дифференциальных уравнений в природе, методы интегрирования частных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения, Метод Фурье, Граничное условие, Асимптотический метод, Асимптотическое свойство.

Abstract: This article examines the study of the application of differential equations in nature, and methods of integrating partial differential equations.

Keywords: Differential equations, Fourier method, Boundary condition, Asymptotic method, Asymptotic property.

Fizikaning ko'pgina masalalari differensial tenglamalar, xususan xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Ularni aniq yechib bo'lmaydi.

Agar bunday tenglamalarda o'zgaruvchilarni ajratish mumkin bo'lsa, u holda unga (1807 y) Furiye tomonidan taklif etilgan metodni qo'llash mumkin. Bu metod berilgan tenglamani chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi parametrga bog'liq bo'lgan oddiy differensial tenglamaga keltiradi.

Bunday masalaga misol qilib bir jinsli chegaraviy

$$y(a) = y(b) = 0 \quad (1)$$

shartni qanoatlantiruvchi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda g(x) - r(x)) = 0 \quad (2)$$

ikkinchi tartibli differensial tenglamani qarash mumkin, bunda λ — katta parametr, $g(x)$, $r(x)$, $[a, b]$ kesmada berilgan funksiyalar.

(2)- differensial tenglamaga *Shturm-Liuvilli tenglamasi* deyiladi.

Furiye metodini qo'llab o'zgaruvchi koeffitsiyentli oddiy differensial tenglama hosil qilinadi. Bunday tenglama umumiy holda integrallanmaydi.

Faqat xususiy hollarda (1), (2) masalalar uchun Furiye tomonidan yechimlar aniqlangan. Bu yechimlar *fundamental funksiyalar* deyiladi.

Furiyening natijalari (1828 y) Liuville tomonidan umumlashtirilgan. U ixtiyoriy $f(x)$ funksiyani (1), (2) masalalarning $y_k(x, \lambda)$, ($k=1, 2, \dots$) fundamental funksiyalari orqali

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x, \lambda) \quad (3)$$

qatorga yoyish metodini taklif etdi. Bu funksiyalar λ parametrning katta qiymatlarida ortogonallik xossasiga ega. Shuning uchun (3) qatorning c_k , ($k = 1, 2, \dots$) koeffitsiyentlari

$$c_k = \int_a^b f(x) y_k(x, \lambda) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

formuladan aniqlanadi.

(3) qator $[a, b]$ kesmada yaqinlashuvchi bo‘lib uning yig‘indisi $f(x)$ funksiya ekanligi isbotlandi. (3) qatorning yaqinlashishini Liuvilli $y_k(x, \lambda)$, $k = 1, 2, \dots$ funksiyalar uchun λ parametr orqali asimptotik formula kiritish yordamida isbotlagan. (3) tenglikni isbotlash uchun Shturmning ilmiy xulosalaridan foydalanib n -tartibli differensial tenglamaning fundamental funksiyalari uchun asimptotik formulani hosil qiladi.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(1 - \frac{a}{t^2}\right)y = 0, \quad (5)$$

differensial tenglamani qaraymiz, bunda a -kompleks son, $t > 0$ haqiqiy o‘zgaruvchi. (5)-tenglama o‘zgaruvchi koeffitsiyentli uni integrallab bo‘lmaydi. Bu tenglamaning yechimini

$$y(t) = e^{it}(c_0 + c_{-1}t^{-1} + \dots + c_{-n}t^{-n} + \dots) \quad (6)$$

ko‘rinishda izlaymiz. U holda

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} t^{-k} \quad (7)$$

qatorning c_{-k} koeffitsiyentlarini tanlash natijasida funksiya (5) tenglamaning formal qanoatlantirishi mumkin. (formal deb shu ma’noda olinadiki, t^{-m} ning har qanday darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni yiqqanimizda nolga teng bo‘lgan ayniyat hosil bo‘ladi.

(6)-darajali qator t ning katta qiymatlarida uzoqlashuvchi bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas (buni Puankare ko‘rsatgan). (5) tenglamaning aniq yechimi

$$y(t) = e^{it}(S_n(t) + \theta(t^{-n-1})), \quad t \rightarrow \infty \quad (8)$$

ko‘rinishda asimptotik formula orqali ifodalanadi, bunda $S_n(t)$ - (7)-qatorning xususiy yig‘indisi.

(7)-xossaga ega bo‘lgan (6) formal yechimga *asimptotik yechim*, asimptotik yechimni tuzish metodlariga *asimptotik metod* deyiladi.

(8) formulada $y(t)$ funksiya t erkli o'zgaruvchining asimptotik ko'rinishini ifodalaydi. Oldingi tadqiqotlarning metodlari har qanday $x \in [a, b]$ va λ parametr bo'yicha asimptotik yechimlarni tuzish imkonini beradi.

Birkhof

$$y^{(n)} + \rho a_{n-1}(x, \rho)y^{(n-1)} + \dots + \rho^n a_0(x, \rho)y = 0 \quad (9)$$

differensial tenglamaning yechimini tuzish uchun asimptotik formulani kiritadi, bunda $a_i(x, \rho)$, $i = \overline{0, n-1}$, ρ – kompleks parametrli analitik funksiyalar bo'lib $[a, b]$ kesmada x haqiqiy o'zgaruvchi bo'yicha cheksiz differensiallanuvchi. Shlezinger yechimning asimptotik xossasini katta $|\rho|$ uchun belgilangan $\arg \rho = \lambda$ o'qda isbotlaydi. Birkhof undan farqli asimptotik xossani kompleks tekisligining $\theta \leq \arg \rho \leq 2$ sektori uchun isbotlaydi.

Shlezinger va Birkhof ishlarini Tamarkin

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=0}^n a_{ij}(x, \rho)y_j, \quad i = \overline{1, n} \quad (10)$$

chiziqli differensial tenglamalar sistemasi uchun umumlashtirgan, bunda $a_{ij}(x, \rho)$, $i, j = \overline{1, n}$ haqiqiy o'zgaruvchi bo'yicha cheksiz differensiallanuvchi va $\rho = \infty$ nuqta atrofida kompleks parametr bo'yicha analitik funksiyalar bo'lib, bu nuqtada o'ziga xos xususiyatga ($r \geq 1$ tartibli qutbga) ega.

Shlezinger, Birkhof, Tamarkinlarning ilmiy natijalari

$$\det(a_{ij}^{(0)}(x) - \lambda \delta_{ij}) = 0, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (11)$$

xarakteristik tenglama har qanday $x \in [a, b]$ uchun oddiy ildizlarga ega bo'lgandagina o'rinli, bunda $a_{ij}^{(0)}(x), a_{ij}^{(0)}(x, \rho)$ funksiyani ρ parametrning darajalari

bo'yicha qatorga yoyganda hosil bo'lgan ozod had, δ_{ij} – Kronekera simvoli. Faqat ikkinchi tartibli

$$y'' + \rho a_1(x, \rho)y' + \rho^2 a_2(x, \rho)y = 0$$

tenglama uchun (1) tenglamaning ildizlari $[a, b]$ kesmada bir-biriga aynan teng bo'lgan hol [1] ishda qaralgan. Yuqori tartibli differensial tenglamalar, shuningdek (10) ko'rinishdagi sistemalar uchun xarakteristik tenglama karrali ildizlarga ega bo'lgan hol uzoq muddat o'rganilmay kelingan. O'tgan asrning 60-70 yillariga kelib xarakteristik tenglama karrali ildizlarga ega bo'lgan hol ustida tadqiqot ishlari olib borilgan.

Katta ρ parametrga bog'liq bo'lgan differensial tenglamalar sistemasining formal yechimlarini ifodalash uchun Eylerning metodiga o'xshash o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamaga qo'llash uchun

$$\exp\left(\rho^r \int_a^x \sum_{s=0}^{r-1} \rho^{-s} \lambda_s(\tau) d\tau\right) \sum_{s=0}^{\infty} \rho^{-s} y_s(x)$$

ifodadan foydalanilgan, natijada izlanayotgan yechim uchun

$$y(x, \rho) = \exp\left(\rho^r \int_a^x \sum_{s=0}^{r-1} \rho^{-s} \lambda_s(\tau) d\tau\right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \rho^{-s} y_s(\tau) + O(\rho^{-m})\right)$$

asimptotik formula hosil qilingan.

Yechimning asimptotik ko'rinishda umumiyroq ifodalashning

$$y_i(x, \rho) = \sum_{i=1}^n z_i(x, \rho) \left(\sum_{j=1}^m y_{ij}(x) \rho^{-j} + O(\rho^{-m})\right)$$

ko'rinishga ega bo'lgan holi, bunda $z_i(x, \rho), i = \overline{1, n}$ funksiyalar, ba'zi chiziqli differensial tenglamalar sistemasini ifodalashi V.S.Pugachev ishlarida berilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati:

- [1] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, -М.: Мир, 1973.-464с.
- [2] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотический метод в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1963, 410 с.

[3] Фешенко С.Ф, Шкиль Н. И, Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.-К: Наук думка, 1966.-252с.